*Vol. 1 - Serie: **FÍSICA***
Para Ciencias e Ingeniería

CINEMÁTICA

Principios. Preguntas y Problemas Resueltos

Tercera Edición

DOUGLAS FIGUEROA

Vol. 1 - Serie: F Í S I C A
Para Ciencias e Ingeniería

Cinemática

Tercera Edición

Principios, Preguntas y Problemas Resueltos

Douglas Figueroa, PhD
Profesor Titular
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar

A Oriana y Sofía

INTRODUCCIÓN

Esta serie está dirigida a estudiantes de los cursos introductorios de física universitaria. No pretende sustituir al librb de texto; su único propósito es complementarlo, ayudando al estudiante a afianzar y profundizar sobre lo aprendido en el aula, aplicando los principios y leyes físicas en situaciones interesantes y estimulantes. Creemos que, con un intenso trabajo práctico basado en el planteamiento de preguntas y la resolución de problemas, podemos lograr que el alumno desarrolle habilidades y estrategias metodológicas que le permita vencer las dificultades que son inherentes al aprendizaje de esta asignatura; tarea que difícilmente puede lograr el docente en el limitado tiempo de clase que dispone. En esta Tercera edición de la Unidad 1 dedicada a la Cinemática de la partícula, se han actualizado y ampliado todo los temas, incorporando nuevos problemas y preguntas. Se presenta el material en seis capítulos, cada uno de los cuales se organiza en tres secciones:

a) Principios Fundamentales: La teoría es expuesta en forma lógica, clara y concisa, tratando de destacar los conceptos básicos y las leyes generales, para permitir una rápida revisión.

b) Problemas Resueltos: Es una selección de problemas que cubren una amplia gama de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones próximas a la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos. Se incluyen las soluciones en detalle, resaltando el aspecto metodológico y didáctico.

c) Verifica tu comprensión: Son preguntas expresadas en forma de elección múltiple, a fin de que compruebes tu comprensión conceptual de los temas abordados y al mismo tiempo que desarrolles tu intuición y sentido físico. La mayoría son de naturaleza conceptual o plantean ejercicios cualitativos, cuya solución se alcanza mediante el razonamiento reflexivo, sin tener que recurrir a las fórmulas. Algunas preguntas presentan situaciones aparentemente paradójicas que podrían ir en contra del sentido común, !piénsalas antes de mirar la respuesta!

La resolución de problemas de física es un proceso intelectual parecido a una pequeña investigación científica en que, no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de pasos a seguir para obtener un resultado correcto. La destreza necesaria sólo la alcanzarás trabajando con dedicación y ahínco, hasta adquirir un dominio razonable de los conceptos, principios y leyes físicas que te permita incrementar tu nivel de aprovechamiento y así logres culminar exitosamente esta asignatura. ¡Suerte, y adelante!

Douglas Figueroa, PhD
figueroa @usb.ve

CONTENIDO

1

LAS MAGNITUDES FÍSICAS

La física es la ciencia fundamental dedicada el estudio sistemático de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro universo. Las leyes físicas se establecen sobre la base de la generalización de hechos experimentales, reflejan regularidades objetivas observadas en la naturaleza y pueden predecir en forma cuantitativa los resultados de futuros experimentos. La física describe cómo se comporta la naturaleza y permite explicar una amplia variedad de fenómenos o procesos aparentemente desvinculados entre sí, partiendo de unos pocos principios básicos. Las aplicaciones a la resolución de problemas de índole práctica ha dado origen a las distintas ramas de la ingeniería y sus frutos han cambiado por completo el modo de vivir de la especie humana. Cualquiera que sea la rama de la ingeniería o de la ciencia a la que uno se dedique, se encontrará a cada paso, aplicaciones de la metodología y formas de pensar que se ha adquirido en el estudio de la física. Por lo general, para explicar un tipo determinado de fenómeno, las leyes físicas se expresan en forma de enunciados o ecuaciones matemáticas concisas que relacionan diversas *magnitudes físicas*, tales como longitud, fuerza, energía, etc. Las matemáticas constituyen el lenguaje formal y operativo de la física y es una herramienta poderosa de análisis y de síntesis. Este capítulo servirá como una especie de introducción y repaso a las ideas asociadas con las magnitudes físicas, buscando plasmar en lenguaje simbólico los aspectos relevantes de sistemas físicos, citando ejemplos específicos donde se aplican conocimientos elementales del análisis algebraico y geométrico.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Sistemas físicos y modelos
- Magnitudes físicas
- El Sistema Internacional de Unidades (SI)
- Análisis dimensional
- Escalamiento
- Precisión y cifras significativas

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

SISTEMAS FÍSICOS

Para analizar una situación dada, en física comenzamos delimitando lo que denominamos el *sistema*, es decir, aquel elemento o conjunto de elementos que están relacionados de alguna manera y en los cuales, fijamos nuestra atención.

Una vez elegido el sistema pasamos a identificar su ámbito o *entorno*, constituido por elementos externos que interaccionan con el sistema en estudio.

Por ejemplo, si se desea determinar la trayectoria de una pelota de fútbol que es pateada al aire, podríamos tomar la pelota como el sistema, mientras que el entorno podría estar constituido por los elementos mas relevantes que tienen influencia sobre la pelota: el zapato del futbolista, el aire, la Tierra, etc.

LEYES FÍSICAS

Los procesos y fenómenos físicos ocurren con determinada relación causal unos con otros. Mediante la observación y la experimentación, los científicos descubren relaciones que se cumplen en una amplia variedad de casos y les permiten suponer que la naturaleza se apega a ciertas reglas. Se establecen así las leyes en forma de enunciados o ecuaciones concisas que son utilizadas para estudiar el comportamiento de múltiples sistemas en diversas condiciones. Por ejemplo, la afirmación: "la energía siempre se conserva", es aceptada como una ley que sirve de base para el análisis de cualquier fenómeno físico.

MODELOS FÍSICOS

La física se basa en modelos o versiones simplificadas de situaciones mucho mas complejas. Es decir, en la física se aborda el estudio de un sistema suponiendo la existencia de fenómenos o procesos simples que representan sólo una porción limitada de la realidad.

Ningún modelo es perfecto, hay que estar consciente de sus limitaciones y si se observan discrepancias entre los resultados del análisis teórico y la experiencia, el modelo debe ser reemplazado por otro mas apropiado.

Por ejemplo, en el modelo atómico de Bohr se consideraba como si el átomo estuviese constituido por un núcleo con electrones girando en orbitas definidas a su alrededor, del mismo modo en que los planetas lo hacen en torno al Sol. Este modelo proporcionó algunas predicciones correctas pero pronto resultó demasiado simplificado y luego surgió la mecánica cuántica que considera que los fenómenos atómicos son de naturaleza estadística.

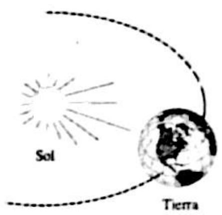
Modelo Planetario del átomo

Al analizar un proceso, tendremos necesidad de recurrir siempre a conceptos o abstracciones que reflejan solamente algunas propiedades determinadas de los objetos. Así, con frecuencia supondremos un objeto puntual, una fuerza aplicada en un punto, un resorte sin masa, un cuerpo rígido, un líquido sin viscosidad, etc...

EL MODELO DE PARTÍCULA

Este libro trata sobre la cinemática de la partícula, es decir, se aborda la descripción del movimiento de objetos reales (pelotas, automóviles, personas), ignorando su tamaño y forma y considerándolos como cuerpos puntuales o *partículas*.

Si queremos analizar el movimiento de una pelota que es lanzada al aire, ignoramos (por ahora) el hecho de que la pelota puede rotar, despreciamos la resistencia del aire y el hecho de que su peso varía con la distancia al centro de la Tierra. En su lugar inventamos una versión simplificada de la pelota, despreciando su tamaño y forma y la consideramos como un cuerpo puntual.



La Tierra considerada como una partícula

La palabra partícula tiene un significado relativo y no implica límite de tamaño. Por ejemplo, para describir el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, resulta conveniente considerar la Tierra como una partícula. Pero el modelo de partícula resulta inapropiado cuando queremos estudiar los efectos de la rotación de la Tierra alrededor de su eje, como se verá en la Unidad 3 que trata sobre el tema sistemas de partículas.

MAGNITUDES FÍSICAS

Son *magnitudes físicas* ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. Las magnitudes son atributos medibles (la masa, la energía, la temperatura) y por lo tanto, se definen mediante un conjunto de operaciones experimentales.

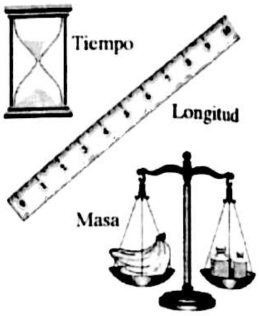
LAS MAGNITUDES FUNDAMENTALES

En física, tanto las leyes como las definiciones relacionan matemáticamente entre sí diversas magnitudes. Es posible seleccionar un conjunto reducido pero completo de ellas que nos permite expresar cualquier otra magnitud en función de dicho conjunto. Ese pequeño número de magnitudes se denominan *magnitudes fundamentales*, mientras que el resto que pueden expresarse en función de ellas, reciben el nombre de *magnitudes derivadas*.

Magnitudes fundamentales:

- *Longitud*
- *Masa*
- *Tiempo*
- *Intensidad de corriente*
- *Temperatura*
- *Intensidad luminosa*
- *Cantidad de sustancia*

Las magnitudes fundamentales empleadas en mecánica son: *longitud*, *tiempo* y *masa*. Estos son conceptos primarios que adquirimos en forma natural, de la manera como percibimos las cosas.



La *longitud* es un concepto directamente relacionado con la idea de distancia o de la extensión de los cuerpos.

El *tiempo* es un concepto asociado a la idea de que los eventos físicos ocurren en sucesiones ordenadas y duran un cierto intervalo. Los intervalos temporales se miden por comparación con algún proceso físico que se repite.

La *masa* es un atributo de cada cuerpo que determina la intensidad de su interacción gravitacional con otros cuerpos y además, su respuesta cuando se le somete a fuerzas externas.

Tiempo: *¿Cuánto dura?*
Longitud: *¿Qué espacio ocupa?*
Masa: *¿Cuánta materia contiene?*

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El proceso de medición define una magnitud física y arroja como resultado el *valor* de la misma. La medición consiste en comparar el valor de una magnitud física con otra cantidad de la misma magnitud a la que se denomina *unidad*.

La comunidad científica y muchas otras personas necesitan normalizar su sistema de medidas para que los datos suministrados por unos puedan ser interpretados por otros. La selección de las unidades patrón o estándar determina el sistema de unidades. El sistema de unidades de aceptación común es el Sistema Internacional (SI). En mecánica las unidades SI fundamentales son:

El metro (m): Es la distancia que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de un segundo.

El segundo (s): Se define como 9 192 631 770 veces la duración de una oscilación asociada a una transición atómica entre dos niveles del átomo de cesio -133.

El *kilogramo (kg)*: es la masa de un prototipo cilíndrico y macizo fabricado con una aleación de platino e iridio (que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en París).

Unidades SI fundamentales en mecánica

El metro

El segundo

El kilogramo

UNIDADES DERIVADAS

Las magnitudes *derivadas* quedan definidas mediante operaciones físicas entre magnitudes independientes. Por ejemplo, la velocidad es la magnitud física que se obtiene al dividir una distancia recorrida por el tiempo empleado. Otras magnitudes derivadas son: la aceleración, la fuerza, la presión, la energía.....

Magnitudes derivadas

Velocidad, Aceleración, Fuerza, Energía, Densidad, Presión,....

DIMENSIONES

La combinación de magnitudes fundamentales que se usa para caracterizar una dada magnitud física es lo que se llama la *dimensión* de dicha magnitud. La dimensión especifica su naturaleza física y no depende del sistema de unidades empleado.

[X] = Dimensión de X

Para denotar las dimensiones de una magnitud física, usualmente se usan corchetes. Los símbolos L, M y T representan las dimensiones de longitud, masa y tiempo. Las magnitudes físicas derivadas pueden expresarse en la forma de potencias de las fundamentales: $L^a M^b T^c$.

Magnitud	*Unidad SI*	*Dimensión*
Área	m^2	$[A] = L^2$
Velocidad	m/s	$[v] = L/T$
Aceleración	m/s^2	$[a] = L/T^2$
Fuerza	N	$[F] = ML/T^2$
Energía	J	$[E] = ML^2/T^2$

ANÁLISIS DIMENSIONAL

Las ecuaciones en física deben relacionar magnitudes de manera consistente con sus dimensiones. Una condición para que una ecuación tenga sentido físico es que todos los términos a ser sumados, restados o igualados, tengan las mismas dimensiones. Si esta condición se satisface entonces, la ecuación es *dimensionalmente homogénea*.

Homogeneidad dimensional

El análisis dimensional aprovecha el hecho de que las dimensiones se pueden tratar como cantidades algebraicas y constituye una herramienta útil para:

- Detectar errores en el resultado de un problema.
- Deducir relaciones entre magnitudes físicas.
- Revelar las leyes del escalamiento.

Análisis dimensional

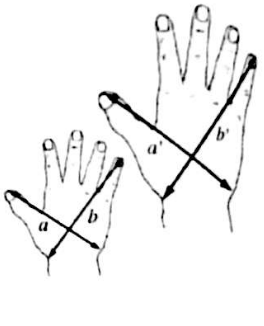
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$L = L + (\frac{L}{T})T + (\frac{L}{T^2})T^2 = L + L + L$$

Longitud = Longitud

LEYES DE ESCALAMIENTO

Cuando las dimensiones lineales de un objeto son alterados en la misma proporción, se obtiene un objeto ***semejante*** al original. Las áreas de figuras semejantes varían como el cuadrado de sus dimensiones lineales y sus volúmenes varían como el cubo de sus dimensiones lineales.



No es posible extrapolar el comportamiento de un sistema de una escala a otra de forma trivial mediante una regla de tres, sino que hay que determinar la correspondiente ley de escala.

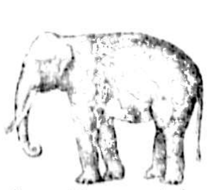
El comportamiento de sistemas físicos en el escalamiento tiene aplicaciones prácticas muy importantes. Si se diseña un objeto grande sobre la base de un modelo a escala pequeña, hay que tomar en cuenta las modificaciones en sus ***propiedades físicas***.

Leyes de escalamiento:

Superficie ~ L^2

Volumen (y masa) ~ L^3

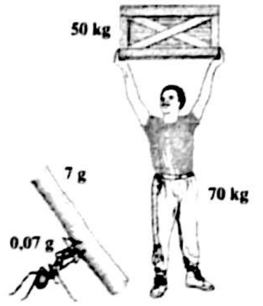
A modo de ejemplo, la masa del cuerpo de los distintos animales aumenta con el volumen pero la resistencia de sus piernas y brazos es proporcional al área transversal. El análisis de escalamiento muestra la imposibilidad de que pudieran existir hombres gigantes con las mismas proporciones que establecería una simple razón de semejanza. El peso del hombre, que es proporcional a la cantidad de carne y hueso, está soportado por su esqueleto, músculos y tendones.



¿Por qué las patas de los elefantes son tan gruesas?

Suponga que aumentamos en diez veces las dimensiones lineales transformándole en un gigante. Su peso que es proporcional a su volumen se volvería 10^3 veces mayor, mientras que la resistencia de sus músculos y huesos, que es proporcional al área de la sección transversal tan sólo aumentaría 10^2 veces. El gigante tendría dificultades para movilizarse porque sus músculos y huesos estarían sometidos a serios esfuerzos y no podrá sostenerse de pie, pues su esqueleto se desmoronaría por la acción de su propio peso.

Si un hombre es un millón de veces mas masivo que una hormiga, esto *no* significa que será un millón de veces mas fuerte, sino $(10^6)^{2/3} = 10^4$ veces. Esto explica por qué una hormiga es capaz de levantar un peso de 100 veces el peso suyo, mientras que un humano solo puede levantar en promedio 0,7 veces su peso.



Hormiga ***Puede levantar 100 veces su peso***

Humano ***Puede levantar 0,7 veces su peso***

PRECISIÓN Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Las magnitudes físicas sólo pueden medirse con determinada *precisión* y sus valores numéricos deben ser especificados con el número correcto de *cifras significativas*, es decir, sólo con los dígitos que se conocen con razonable certeza, ya que son los únicos que tienen significado físico.

Cuando se usa una calculadora de bolsillo, un error común es retener en la respuesta final del cálculo, todas las cifras que aparecen en la pantalla. Suponga que se desea calcular el volumen de una esfera cuyo radio se conoce con tres cifras significativas: R = 2,18 cm. Empleando la calculadora, resulta 43,396838 cm^3. Lo correcto sería redondear este resultado a 43,4 cm^3, es decir, ***se debe conservar un número de cifras no mayor que el menor número de cifras significativas de los números que intervienen en la operación***. En este ejemplo, los valores de las constantes numéricas, π y 4 / 3 son conocidos exactamente.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi(2{,}18\text{cm})^3}{3}$$

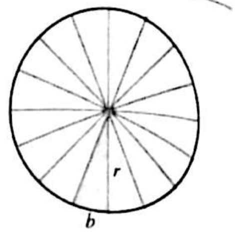
$$= 43.4\text{cm}^3$$

Para propósitos prácticos, la mayoría de los datos numéricos que usaremos en este texto tendrán tres cifras significativas. Sin embargo, cuando decimos por brevedad que un móvil recorre 89 m en 3 s, en realidad lo que queremos significar es 89,0 m. en 3,00 s, lo cual corresponde a una rapidez de 29,7 m / s.

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-1.01. *Del área de un triángulo al área del círculo*

Divida un círculo de radio r en un número grande de tajadas triangulares iguales y demuestre que la suma de la áreas de las tajadas da la formula conocida del área total del círculo.



Solución: Si el número de triángulos es suficientemente grande, la altura h de cada uno se puede aproximar por el radio r del círculo. Si b es la base y h la altura, el área de un triángulo es: $bh/2$.

Como en la circunferencia hay un total de $2\pi r/b$ pedazos de longitud b, el área del círculo es:

Área = (área de cada triángulo)x(número de triángulos)

$$A = (\frac{1}{2}br)(\frac{2\pi r}{b}) = \pi r^2$$

Esta es la fórmula conocida para el área de un círculo.

Respuesta:

Área del circulo: $A = \pi r^2$

PR-1.02. *Coincidencias en las agujas del reloj*

A las 12 del mediodía las agujas de un reloj están una sobre la otra. Esta situación se repite varias veces e el día.

a) En qué instante estarán alineadas en sentidos opuestos por primera vez.

b) En qué instante vuelven a estar una sobre la otra por primera vez.

Solución: a) La aguja horaria describe una circunferencia (2π radianes) en 12 horas. El ángulo barrido en un intervalo de Δt segundos es:

$$\theta_h = 2\pi \frac{\Delta t(s)}{(12h)(3600s/h)} = \frac{2\pi\Delta t}{43200} rad$$

El minutero se mueve 12 veces mas rápido, ya que completa una circunferencia en 1 hora.

El ángulo barrido en un intervalo de tiempo Δt (en segundos) es:

$$\theta_m = 2\pi \frac{\Delta t(s)}{(1h)(3600s/h)} = \frac{2\pi\Delta t}{3600} rad$$

Fig. (a)

Si comenzamos a observar el movimiento a las 12, en que las agujas están una sobre la otra, el tiempo transcurrido para que queden alineadas en sentidos opuestos por primera vez, viene dado por:

$$\theta_m - \theta_h = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi\Delta t}{3600} - \frac{2\pi\Delta t}{43200} = \pi$$

$$\Delta t = \frac{1}{2}(\frac{1}{1/3600 - 1/43200}) = 1964s = 32,7min$$

Es decir, cuando sean las 12 y 32,7 minutos.

Fig. (b)

b) A partir de las 12, el tiempo transcurrido para que las agujas se coloquen una sobre la otra por primera vez, viene dado por:

$$\theta_m - \theta_h = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi\Delta t}{3600} - \frac{2\pi\Delta t}{43200} = 2\pi$$

$$\Delta t = (\frac{1}{1/3600 - 1/43200}) = 3928s = 65,5min$$

Es decir, cuando el reloj indique la 1 y 5,5 minutos.

Respuesta

a) A las 12 y 32,7 minutos
b) A la 1 y 5,5 minutos

PR-1.03. *Aproximación binomia*

La capacidad de hacer estimaciones cuantitativas es una destreza muy importante en física e ingeniería. A veces solo nos interesa obtener un valor aproximado de determinada cantidad y un técnica muy útil consiste en aplicar la expresión del desarrollo de un binomio.

a) Demostrar que si $|x| << 1$, y para cualquier valor de n vale la aproximación: $(1+x)^n \approx 1 + nx$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

b) Utilizar esta expresión para hallar valores aproximados de:

$$x_1 = \frac{1}{1,01}, \qquad x_2 = \sqrt{99}$$

Compare su valor aproximado con el valor más exacto obtenido de la calculadora, para estimar el error correspondiente.

Solución: a) Considerando el desarrollo del binomio:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}x^3 + \ldots$$

Esta serie converge para cualquier valor de n si x^2 es menor que 1. En particular, si $|x| << 1$, entonces cada término es mucho menor que el inmediatamente anterior y en primera aproximación podemos ignorar todos los términos excepto los dos primeros:

$$(1+n)^n \approx 1 + nx$$

Aproximación binomia

$$\boxed{(1+n)^n \approx 1+nx}$$

b) $x_1 = 1{,}01^{-1} = (1+0{,}01)^{-1} \cong 1 + (-1)(0{,}01) = 0{,}99$

$$\text{Error: } \frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0{,}9901 - 0{,}9900}{0{,}9901} = 1\times10^{-4} = 0{,}01\%$$

$$x_2 = \sqrt{99} = (100-1)^{1/2} = 10(1-\frac{1}{100})^{1/2}$$

$$x_2 \approx 10[1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{100})] = 9{,}95$$

$$\text{Error: } \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{9{,}9500 - 9{,}9499}{9{,}9499} = 1\times10^{-5} = 0{,}001\%$$

Respuesta:

a) $(1+n)^n \approx 1+nx$
b) $1/1{,}01 \approx 0{,}99$ Error: 0,01%
$\sqrt{99} \approx 9{,}95$. Error: 0,001%

PR-1.04. *El área de una esfera a partir de su volumen*

Encuentre una expresión para el volumen de una capa esférica limitada por dos esferas concéntricas de radios R y $(R + \Delta R)$ y utilice esta expresión para obtener la fórmula del área de la esfera en el límite $\Delta R \to 0$.

Solución: Sabemos que el volumen de una esfera de radio R es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

El volumen encerrado por las dos capas esféricas es la diferencia entre sus volúmenes:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3[(1+\frac{\Delta R}{R})^3 - 1]$$

Si $\Delta R/R$ es pequeño se puede usar la aproximación binomia, $(1+x)^n \approx 1 + nx$:

Por lo tanto:

$$\Delta V \approx \frac{4}{3}\pi R^3[(1+3\frac{\Delta R}{R}) - 1] = 4\pi R^2 \Delta R$$

Por otra parte, el volumen de un cascarón esférico delgado se puede expresar en la forma del producto de un área A por un espesor ΔR:

$$\Delta V = A\,\Delta R \qquad (2)$$

Comparando las expresiones (1) y (2), se deduce que:

$$A = 4\pi R^2$$

Esta es la expresión conocida para el área de una esfera.

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta V = 4\pi R^2\,\Delta R\\ A = 4\pi R^2\end{array}}$$

PR-1.05. *¿Qué ángulo habrá entre las agujas del reloj?*

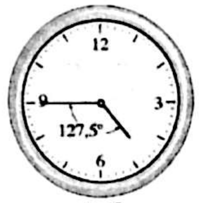
Determine el ángulo que forman el horario y el minutero de un reloj en la siguientes horas:
a) A la una y veinte.
b) A las cuatro y cuarenta y cinco.

Solución: Para determinar el ángulo entre las agujas, hallamos por separado el ángulo que forma cada aguja con un línea de referencia que vamos a tomar en la posición vertical de las 12. Se observa que la aguja horaria barre 360° en 12 horas, por lo tanto esta aguja avanza 360°/12 = 30° en cada hora, mientras que la aguja del minutero avanza 360°/60 = 6° en cada minuto. Por otra parte, mientras el minutero cubre los 360° en 1 hora, la horaria avanza 30° para pasar a la hora siguiente. De esto se deduce que en cada minuto, la horaria avanza 0,5°.

1 : 20

a) A la 1 hora y 20 minutos:

$$\theta_h = 1 \times 30 + 20 \times 0{,}5 = 40°$$
$$\theta_m = 20 \times 6° = 120°$$
$$\Delta\theta = \theta_m - \theta_h = 120° - 40° = 80°$$



4: 45

b) A las 4 horas y 45 minutos:

$$\theta_h = 4 \times 30 + 45 \times 0{,}5 = 142{,}5°$$
$$\theta_m = 45 \times 6° = 270°$$
$$\Delta\theta = \theta_m - \theta_h = 270° - 142{,}5° = 127{,}5°$$

Respuesta:

a) 1:20	$\Delta\theta = 80°$
b) 4:45	$\Delta\theta = 127{,}5°$

PR-1.06. *La cabeza recorre 11 metros mas que los pies*

Suponga una situación hipotética en que una persona de 1,80 m de alto pudiese caminar por el ecuador terrestre y darle una vuelta completa a la Tierra. Su cabeza y sus pies describirían trayectorias circulares de radios diferentes.

a) ¿Cuál sería la diferencia entre las longitudes de las trayectorias recorridas por su cabeza y por sus pies?

b) ¿La diferencia sería otra si caminara por una esfera de menor radio?

Solución: La longitud L_p de la circunferencia descrita por los pies de la persona al caminar por el ecuador terrestre es:

$$L_p = 2\pi R$$

Siendo R el radio de la Tierra. La longitud de la circunferencia descrita por la cabeza de la persona es:

$$L_c = 2\pi(R+h)$$

La diferencia entre las dos longitudes es:

$$\Delta L = L_c - L_p = 2\pi(R+h) - 2\pi R = 2\pi h$$

$$\Delta L = 2\pi(1{,}80\text{m}) = 11{,}3\text{m}$$

b) El resultado no depende del radio de la esfera, y por lo tanto, es igual tanto para la esfera terrestre como para la esfera lunar, o para cualquier esfera pequeña.

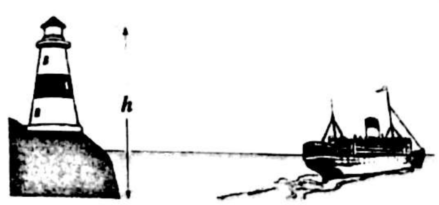
Respuesta:

$\Delta L = 11{,}3$m
El resultado no depende del radio de la esfera.

PR-1.07. *¿Qué tan lejos queda el horizonte?*

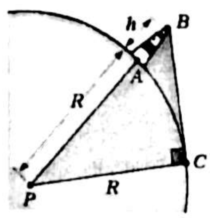
Desde una torre de altura h = 50 m se observa un barco que se aleja en el mar.

¿A qué distancia de la torre estará el barco cuando desaparece en el horizonte?



Solución: Considerando la esfera terrestre, si la punta de la torre está en la posición B y el barco desaparece cuando ha recorrido el arco AC sobre la superficie del agua, podemos completar un triángulo equilátero con vértice en el centro P de la Tierra. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{PC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{PB}^2$$



Si $\overline{PC} = R$, el radio de la Tierra, tenemos:

$$R^2 + \overline{BC}^2 = (R+h)^2 = R^2 + h^2 + 2Rh$$

Simplificando y tomando en cuenta que $h << R$, tenemos:

$$\overline{BC}^2 = h^2 + 2Rh \approx 2Rh$$

$$\overline{BC} \approx \sqrt{2Rh} = \sqrt{2(6{,}37\text{x}10^6\text{m})(50\text{m})} = 25{,}2\text{km}$$

Respuesta

$$\boxed{\overline{BC} = 25{,}2\text{km}}$$

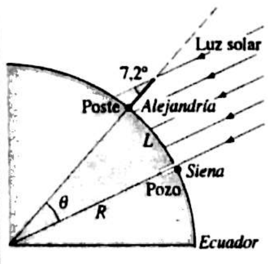
PR-1.08. *El radio terrestre fue medido en el siglo III AC.*

En el año 250 AC, Eratóstenes probó la imposibilidad de que la Tierra fuese plana e ideó una manera de conocer su circunferencia. Observaba que, en el día del solsticio de verano (21 de junio), en Siena, ciudad cerca de la primera catarata del Nilo, los objetos no proyectaban sombra y la luz del Sol se reflejaba de manera directa en el fondo de un pozo. Al mismo tiempo, en Alejandría a 800 km al norte, un poste proyectaba una sombra de 7,2°. Con estos datos, calculó el radio de la Tierra.

Eratóstenes
(276 AC- 197 AC)

Solución: El Sol está tan distante de la Tierra que sus rayos son paralelos cuando llegan a nuestro planeta. En Siena, los rayos solares inciden perpendicularmente y por lo tanto, a lo largo de la línea radial de la Tierra. En Alejandría, midiendo la altura del poste y la longitud de la sombra que proyecta se determina el ángulo entre el plano de la eclíptica y los rayos solares que es de 7,2°. Este ángulo es precisamente la diferencia de latitud, θ, entre ambas ciudades. En radianes es:

$$\theta = 7{,}2°\left(\frac{2\pi\text{rad}}{360°}\right) = 0{,}13 \text{ rad}$$



La longitud de arco subtendido por el ángulo θ es: $L = R\theta$. Por lo tanto, el radio de la Tierra es:

$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{8{,}0\text{x}10^5\text{m}}{0{,}13\text{rad}} = 6{,}2\text{x}10^6\text{m} = 6{,}2\text{x}10^3\text{km}$$

Que es bastante próximo al valor aceptado para el radio medio de la Tierra ($6{,}37\text{x}10^3$ km).

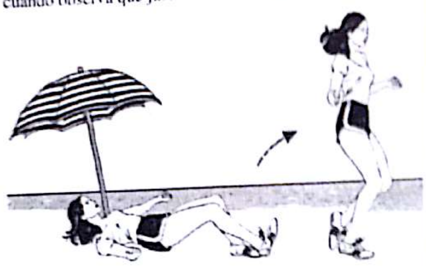
Respuesta:

$\boxed{R = 6{,}2\text{x}10^3 \text{ km}}$

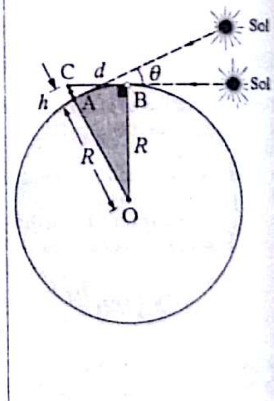
PR-1.09. *Radio de la Tierra a partir de la puesta del Sol*

Para estimar el radio de la Tierra, una alumna acostada en la playa activa un cronómetro en el instante justo en que observa que el Sol desaparece en el horizonte. Inmediatamente se levanta del suelo y estando de pie, con sus ojos a una altura h = 1,60 m, detiene el cronómetro cuando observa que justamente el Sol desaparece.

Si el tiempo transcurrido entre las dos observaciones es Δt = 10 s, determine el radio de la Tierra.



Solución: Cuando la alumna está de pie a una altura h sobre el punto A, la distancia desde sus ojos hasta el punto B en el horizonte es $\overline{CB} = d$, y esta línea forma un ángulo recto con la línea radial $\overline{OB}$ desde dicho punto al centro O de la Tierra. La línea $\overline{OAC}$ que va desde el centro de la Tierra hasta su cabeza, completa un triángulo rectángulo OBC, como indica la figura. Aplicando Pitágoras:



$$R^2 + d^2 = (R + h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$$

Simplificando y tomando en cuenta que $h << R$, tenemos:

$$d^2 = 2Rh + h^2 \approx 2Rh$$

Como el Sol da una vuelta completa alrededor de la Tierra (360°) en 24 horas, el ángulode rotación durante el tiempo Δt será:

$$\theta = 360°\left(\frac{\Delta t}{24h}\right) = 360° \frac{10\text{s}}{24\text{h}(60\text{min/h})(60\text{s/min})} = 0{,}0417°$$

Por otra parte, el ángulo θ que ha girado el Sol alrededor de la tierra es precisamente el ángulo que queda entre las líneas tangentes en A y B. Para el triángulo rectángulo de la figura se observa que: $d = R\, tg\theta$ Tomando en cuenta la expresión anterior para d^2:

$$d^2 = 2Rh = R^2\, tg^2\theta$$

Sustituyendo h = 1,60 m y θ = 0,0417°, se obtiene la expresión para el radio terrestre:

$$R = \frac{2h}{tg^2\theta} = \frac{2(1{,}60\text{m})}{\text{tg}^2 0{,}0417°} = 6{,}04\text{x}10^6\text{m}.$$

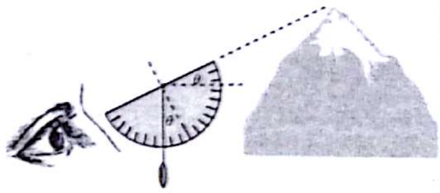
Aunque este es un valor estimado, queda dentro de un 6 % del radio medio de la Tierra ($6{,}37\text{x}10^3$ km).

Respuesta:

$\boxed{R = 5{,}04\text{x}10^6 \text{ m}}$

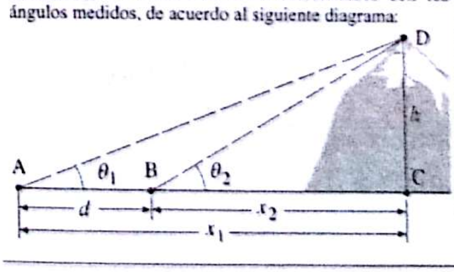
PR-1.10. *¿Cómo medir la altura de una montaña usando un transportador y una plomada?*

Un alumno está en una llanura y desea hacer un estimado de la altura del pico de una montaña que está muy distante, usando un transportador y un hilo con una piedra suspendida (plomada).



Para ello, se alinea el borde recto del transportador hacia la punta de la montaña y se mide el ángulo de elevación inicial, θ_i = 15°. Luego, el alumno camina en línea recta en terreno plano hacia la montaña una distancia d = 1 km, se detiene y mide el nuevo ángulo de elevación, θ_2 = 18°. ¿Cuál es la altura de la montaña respecto al suelo?

Solución: Las distancias están relacionados con los ángulos medidos, de acuerdo al siguiente diagrama:



Las tangentes de los ángulos son, respectivamente:

$$tg\theta_1 = \frac{DC}{AC} = \frac{h}{x_1} = \frac{h}{d+x_2} \qquad tg\theta_2 = \frac{DC}{BC} = \frac{h}{x_2}$$

Sustituyendo de la segunda expresión en la primera, se obtiene:

$$tg\theta_1 = \frac{h}{d+h/tg\theta_2} \qquad h(1-\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}) = d\,tg\theta_1$$

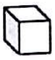
Despejando, obtenemos la elevación del pico de la montaña:

$$h = \frac{tg\theta_1 tg\theta_2}{tg\theta_2 - tg\theta_1} d = \frac{tg15° tg18°}{tg18° - tg15°}(1000m) = 1530m$$

Respuesta:

$\boxed{h = 1530 \text{ m}}$

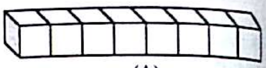
PR-1.11. *El iglú: La casa con mejor aislamiento térmico*

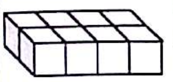


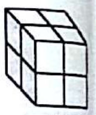
Se desea construir una casa que tenga un volumen dado pero la menor área externa (techo, piso y paredes) a fin de minimizar la transferencia de calor durante épocas de frío o de calor. Se dispone de módulos cúbicos que pueden ser combinados en diferentes geometrías, A, B y C, que tienen el mismo volumen total.

a) Suponga un modelo con módulos cúbicos de 1 m de lado. Compare la relación área/volumen para las tres configuraciones. ¿Cuál sería la opción más conveniente?

b) Halle la relación área/volumen para una esfera que tenga el mismo volumen que las combinaciones de cubos, para demostrar que, la vivienda de un esquimal en forma de cúpula (el iglú) es la que ofrece el mejor aislamiento térmico.


(A)

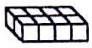

(B)


(C)

Solución: a) (A) Esta casa tiene los 8 módulos en fila. Hay 34 caras externas (incluyendo la base) de modo que el área total expuesta es 34 m^2. Como el volumen total es 8 m^3 la relación área / volumen será: $A/V = 4{,}25$ m^{-1}.

A)  1 x 1 x 8
$V = 8$ m^3 $A = 34$ m^2 $A/V = 4{,}25$

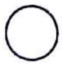
(B) Esta casa es de una planta 2x4. Hay 28 caras externas (incluyendo la base) de modo que el área total expuesta es 28 m^2. Como el volumen total es 8 m^3 la relación área/volumen será: $A/V = 3{,}5$ m^{-1}

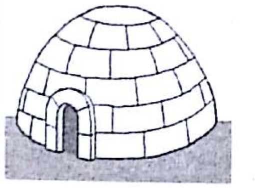
B)  1 x 2 x 4
$V = 8$ m^3 $A = 28$ m^2 $A/V = 3{,}5$

(C) Esta casa es cúbica y tiene dos plantas 2x2. Hay 24 caras externas y el área total expuesta es 24 m^2. La relación área / volumen será: $A/V = 3$ m^{-1}.

C)  2 x 2 x 2
$V = 8$ m^3 $A = 24$ m^2 $A/V = 3$

Evidentemente, entre las tres opciones dadas, la C es la forma más conveniente, ya que *por tener menor área ofrecerá mayor aislación térmica.*

D)  $r = (6/\pi)^{1/3}$
$V = 8$ m^3 $A = 19{,}3$ m^2 $A/V = 2{,}4$



b) Si se construyera una casa esférica (Figura D) con el mismo volumen de 8 m^3, debería tener un radio, dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 8m^3 \quad \Rightarrow \quad r = (\frac{6}{\pi})^{1/3} m$$

La relación área/volumen sería:

$$\frac{A}{V} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^3/3} = \frac{3}{r} = 3(\frac{\pi}{6})^{1/3} = 2{,}42\text{m}^{-1}$$

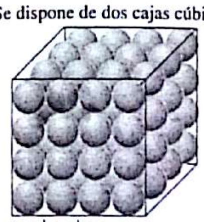
¡La casa esférica tiene una menor relación A/V que la cúbica! Por esta razón, la vivienda de un esquimal en forma de cúpula (el iglú) es la que ofrece la mejor aislación térmica.

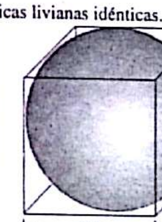
Respuesta:

a) El cubo: $A/V = 3$ m^{-1}
b) Esfera: $A/V = 2{,}42$ m^{-1}

PR-1.12. *¿Cuál de las dos cajas pesa más ?*

Se dispone de dos cajas cúbicas livianas idénticas.





En la caja de la izquierda hay un número de esferas pequeñas de hierro, colocadas en capas.
La caja de la derecha contiene una esfera grande de hierro, cuyo diámetro es igual al lado del cubo.
¿Qué relación hay entre el peso de la caja conteniendo las esferas pequeñas y el peso de la caja conteniendo la esfera grande?

Solución: Suponga que el cubo de la izquierda está constituido por cubos pequeños de lado L, en cada uno de los cuales hay una esfera pequeña de diámetro L. La caja contiene un numero total de $NxNxN = N^3$ esferitas y el volumen ocupado por todas las esferitas es:

$$V = N^3\frac{4}{3}\pi(\frac{L}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{NL}{2})^3$$

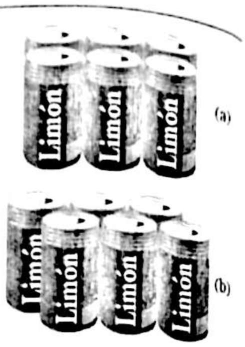
Este es justamente el volumen ocupado por la esfera grande de radio $NL/2$. De aquí se deduce que en ambas cajas hay la misma cantidad de metal y por consiguiente, deben pesar lo mismo.

Respuesta

Las dos cajas pesan lo mismo

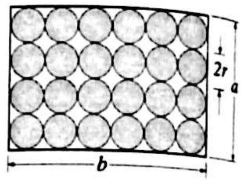
PR-1.13. *Empaquetamiento de latas de refrescos*

Se desea empaquetar latas de refresco con 6x4 = 24 latas en cajas de cartón y se presentan los dos arreglos mostradas. En la opción (a) el empaquetamiento es cuadrado y en la opción (b), el empaquetamiento es hexagonal. Para ambas configuraciones determine la relación entre el área cubierta por los círculos de las latas y el área total de la base rectangular de la caja. ¿Cuál de las dos opciones permite aprovechar mejor el espacio, es decir, cuál presenta menos espacio ocioso?



Solución: a) *Arreglo cuadrado*: Si r es el radio de la lata, el área de la base rectangular de la caja es:

$$A_c = a \times b = (4 \times 2r) \times (6 \times 2r) = 96r^2$$



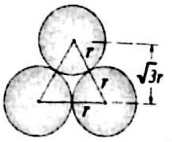
Mientras que el área total ocupada por los círculos de las 24 latas es:

$$A_l = 24(\pi r^2)$$

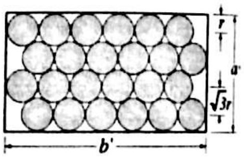
De modo que la razón del área cubierta por las latas al área del rectángulo es:

$$A_l / A_c = 24\pi r^2 / 96r^2 = 0{,}250\pi \ (78{,}5\%)$$

b) *Arreglo hexagonal*: En este caso la base del rectángulo es $b' = 13r$ y la altura $a' = (2 + 3\sqrt{3})r$, el área de la base rectangular de la caja es:



$$A_c' = a' \times b' = (2r + 3\sqrt{3}r) \times (13r) = 13(2 + 3\sqrt{3})r^2$$



La razón del área cubierta por las 24 latas al área del rectángulo es:

$$A_l' / A_c' = 24\pi r^2 / 13(2r + 3\sqrt{3}r)r^2 = 0{,}257\pi \ (80{,}6\%)$$

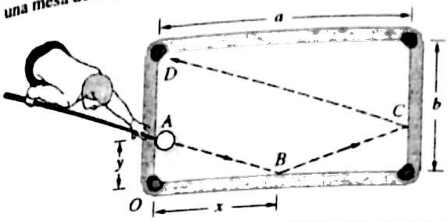
Los resultados indican que el empaquetamiento hexagonal es mas eficiente, ya que tiene menos espacio ocioso. Esta ventaja se incrementa a medida que aumenta el número de latas.

Respuesta

a) Cuadrado: $A_l / A_c = 0{,}250\pi$
b) Hexagonal: $A_l' / A_c' = 0{,}257\pi$

PR-1.14. *Geometría en el juego de billar*

Una bola de billar se encuentra en la posición A, pegada de la banda lateral y a una distancia y de la esquina O de una mesa de billar:

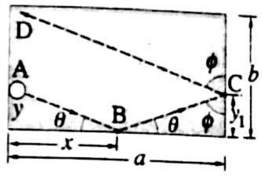


Las dimensiones en la mesa son:

a = 2,5 m.
b = 1,5 m.
y = 0,5 m.

¿Hacia cuál posición, x en la banda adyacente, debe apuntar el jugador para que la bola llegue a la esquina D, después de rebotar elásticamente en dos bandas únicamente?

Solución: Suponemos que la bola se golpea en el centro de modo que no se le comunique ninguna rotación y los choques con las bandas ocurren en perfecta reflexión, es decir, los ángulos de rebote son iguales a los ángulos de incidencia. Para el ángulo θ de choque en la banda inferior, se cumple:



$$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{y_l}{a - x}$$

Para el ángulo ϕ de choque con la banda lateral:

$$tg\phi = \frac{a - x}{y_l} = \frac{a}{b - y_l}$$

Despejando y_l de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda ecuación, se obtiene el valor de x:

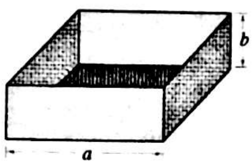
$$x = \frac{2ay}{b + y} = \frac{2(2{,}5\text{m})(0{,}5\text{m})}{1{,}5\text{m} + 0{,}5\text{m}} = 1{,}25\text{m}$$

Respuesta

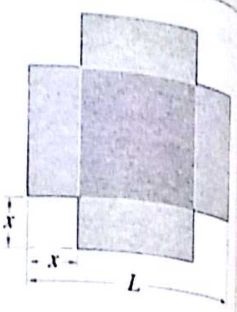
$$x = \frac{2ay}{b + y} = 1{,}25\text{m}$$

PR-1.15. *Construya una caja de máximo volumen*

Se dispone de una lámina de cartón de forma cuadrada de lados L, con la cual se desea construir una caja abierta que tenga el máximo volumen posible. Para ello se le cortan cuadrados iguales en cada esquina y los lados se doblan hacia arriba. Determine el máximo volumen de la caja que se puede obtener de esta manera.



Solución: Si cortamos en cada esquina un cuadrado de lado x, se obtiene una caja de altura x y lados $(L-2x)$. El volumen de la caja es:

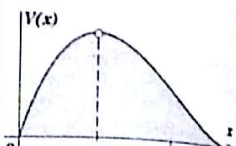


$$V(x) = x(L-2x)^2$$

El extremo de la función $V(x)$ se determina a partir de la condición de que su primera derivada sea nula:

$$\frac{d}{dx}V(x) = 2x(L-2x)(-2) + (L-2x)^2 = 0$$

$$(L-2x)(L-6x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = L/2 \\ x_2 = L/6 \end{cases}$$



La solución $x_1 = L/2$ corresponde a un mínimo volumen ($V = 0$), y no tiene sentido físico porque eliminaría la caja. La solución que corresponde al máximo es: $x_2 = L/6$.

Por lo tanto la caja debe tener una altura $a = L/6$ y una base de lados $2L/3$. El volumen correspondiente de la caja es:

$$V = \frac{2}{27}L^3$$

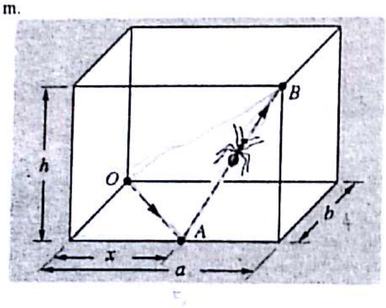
Esto significa que, si tenemos una lámina de cartón de área 1 m^2 podemos construir una caja de volumen máximo 0,074 m^3.

Respuesta

$$\boxed{V = \frac{2}{27}L^3}$$

PR-1.16. *El camino más corto para la hormiga*

Una hormiga se encuentra en la esquina O de una habitación de longitud a = 5 m, ancho b = 4 m y altura h = 3 m.



La hormiga detecta una miga de comida ubicada en el techo, justo en la esquina B diagonalmente opuesta. Determine la longitud del camino mas corto por donde debe caminar la hormiga para ir desde O hasta B.

Solución: a) Método 1. *Usando calculo diferencial:* En el piso, la hormiga debe recorrer un trayecto recto de longitud: $\sqrt{x^2+b^2}$ y en la pared, debe recorrer un trayecto recto de longitud: $\sqrt{(a-x)^2+h^2}$. La longitud total recorrida será:

$$L(x) = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{(a-x)^2+h^2}$$

Para un mínimo de la función, debe cumplirse la condición: $dL(x)/dx = 0$:

$$\frac{d}{dx}L(x) = \frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{(a-x)^2+h^2}] = 0$$

$$\frac{x\sqrt{(a-x)^2+h^2} - (a-x)\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+h^2}} = 0$$

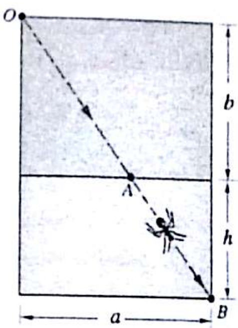
$$x^2[(a-x)^2+h^2] = (a-x)^2(x^2+b^2)$$

Despejando, se obtiene el valor de x:

$$x = \frac{ab}{h+b} = \frac{(5\text{m})(4\text{m})}{3\text{m}+4\text{m}} = 2{,}86\text{m}$$

La longitud de la trayectoria es:

$$L = \sqrt{2{,}86\text{m}^2 + 4\text{m}^2} + \sqrt{(5\text{m}-2{,}86\text{m})^2 + 3\text{m}^2} = 8{,}60\text{m}$$



(Método geométrico)

b) Método 2. *Usando simple geometría:* Si hacemos girar mentalmente la pared, de forma tal quede en el mismo plano que el piso, resulta evidente que el camino mas corto es la línea recta que une directamente O y B. La longitud buscada es la diagonal del rectángulo formado:

$$L = \sqrt{a^2+(b+h)^2} = \sqrt{(5\text{m})^2 + (4\text{m}+3\text{m})^2} = 8{,}60\text{m}$$

Respuesta

$$\boxed{L = \sqrt{a^2+(b+h)^2} = 8{,}60\text{m}}$$

PR-1.17. *La torre Eiffel a pequeña escala*

La torre Eiffel en París está construida de hierro; pesa aproximadamente 9000 toneladas y tiene una altura h = 300 m. Suponga que se construye un modelo fiel también fabricado de hierro y de altura h' = 30 cm.

a) ¿Cuál sería la masa del modelo?

b) Si las barras de la torre pesan 70 toneladas cada una, cuál sería la masa del alambre que debería usarse para las barras del modelo?

*Ya Perelmán: ¿Sabe Ud Física? Edit. Rubiños, Madrid-Moscú

Solución: Como la masa de un cuerpo homogéneo es proporcional a su volumen, las masas de cuerpos geométricamente semejantes serán proporcionales al cubo de sus dimensiones lineales:

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

$$M' = M\left(\frac{h'}{h}\right)^3 = 9000\times10^3\text{kg}\left(\frac{0{,}3\text{m}}{300\text{m}}\right)^3 = 9\times10^{-3}\text{kg} = 9\text{g}$$

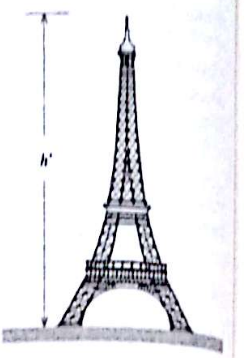
Es decir, el modelo debería tener apenas una masa de 9 g.

b) Para las barras se deberían usar alambres de masa:

$$m' = m\left(\frac{l'}{l}\right)^3 = m\left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

$$m' = 70\times10^3\text{kg}\left(\frac{0{,}3\text{m}}{300\text{m}}\right)^3 = 70\times10^{-6}\text{kg} = 0{,}07\text{g}$$

Estos serían alambres extremadamente finos.



Respuesta:

a) Masa de la torre:
$M' = 9\times10^{-3}\text{kg} = 9\text{g}$
b) Masa de cada barra:
$m' = 0{,}07\text{g}$

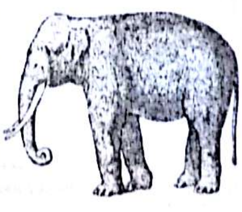
PR-1.18. *¿Cuánta comida necesita un elefante?*

Podemos combinar las leyes del escalamiento con alguna hipótesis biológica para determinar la variación de una propiedad de los seres vivos con el tamaño y así poder extrapolar fenómenos de una escala a otra. Suponga que las necesidades alimenticias de un ratón de masa $m = 200$ g durante un cierto periodo de tiempo es de 50 g, ¿cuánto necesita ingerir un elefante de masa $M = 4000$ kg durante el mismo periodo?

Solución: Una hipótesis biológica plausible es suponer que la tasa de consumo de energía de un mamífero, como consecuencia de los procesos de metabolismo, es proporcional al escape de calor a través de la piel del animal. Por lo tanto, la cantidad de alimento que debe ingerir sería proporcional al área exterior de su cuerpo.

Como el área es proporcional a una longitud característica al cuadrado, $A \propto L^2$ y la masa M es proporcional al cubo de esta longitud: $M \propto L^3$, el área se puede expresar en función de M como:

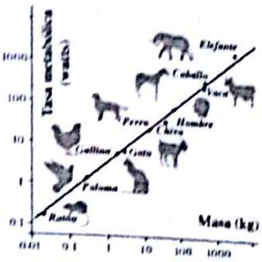
$$A \propto L^2 \propto M^{2/3}$$



Por consiguiente, las necesidades alimenticias del animal seguiría una ley de escala del tipo $M^{2/3}$. Suponiendo que un ratón y un elefante tienen una forma parecida, si el ratón de masa $m = 200$ g ingiere 50 g de comida, un elefante de masa $M = 4000$ kg debe ingerir durante el mismo periodo una cantidad:

$$(50\text{g})\left(\frac{M}{m}\right)^{2/3} = (50\text{g})\left(\frac{4000\text{kg}}{0{,}2\text{kg}}\right)^{2/3} = 36{,}8\text{kg}$$

Un resultado interesante es que la tasa de consumo metabólico en función de la masa del cuerpo para distintos animales resulta proporcional a la potencia 3/4, según se ilustra en la grafica mostrada a la derecha.



Respuesta

$\boxed{36{,}8 \text{ kg de comida}}$

PR-1.19. *Homogeneidad dimensional*

La ecuación de Bernoulli (que se estudiará en la unidad 4 de Fluidos y Termodinámica) dice que la expresión:

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$$

es una constante. Aquí P es la presión de un fluido, ρ es su densidad, h es la altura sobre el piso, g es la aceleración de la gravedad y v es la velocidad del fluido.

Demuestre que la expresión anterior es homogénea dimensionalmente.

Solución: Escribimos las dimensiones de cada uno de los términos de la ecuación:

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\rho g h] = \frac{M}{L^3}\frac{L}{T^2}L = ML^{-1}T^{-2}$$

$$\left[\frac{1}{2}\rho v^2\right] = \frac{M}{L^3}\frac{L^2}{T^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Es decir, los tres términos de la ecuación de Bernoulli poseen iguales dimensiones ($ML^{-1}T^{-2}$) que corresponden a una presión, por lo tanto, queda demostrado que esta ecuación tiene homogeneidad dimensional, como debe ser.

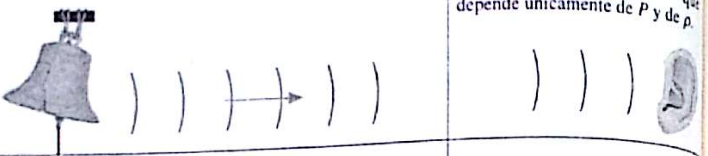
Respuesta:

$$\boxed{[P] = [\rho g h] = \left[\frac{1}{2}\rho v^2\right]}$$

PR-1.20. *Velocidad del sonido por análisis dimensional*

La velocidad v, de propagación del sonido en un gas, depende de la presión P y de la densidad ρ de dicho gas.

Deduzca una expresión para v usando únicamente el análisis dimensional y suponiendo que depende únicamente de P y de ρ.



Solución: Pongamos la expresión para la velocidad v en términos del producto de potencias de la densidad ρ y de la presión P:

$$v \alpha \rho^q P^r$$

A fin de hallar los exponentes q y r, sustituimos las dimensiones que corresponden a las magnitudes físicas: v, ρ y P:

$$[v] = [\rho]^q [P]^r$$

$$LT^{-1} = (ML^{-3})^q (ML^{-1}T^{-2})^r$$

Como M, L y T son magnitudes fundamentales, éstas son independientes y podemos igualar los exponentes que ocurren a ambos lados. Por tanto se obtienen tres ecuaciones simultáneas:

Masa M: $0 = q + r$

Longitud L: $1 = -3q - r$

Tiempo T: $-1 = -2r$

Cuya solución es: $q = -1/2$ $r = 1/2$

De modo que la relación buscada es:

$$v \alpha \rho^{-1/2} P^{+1/2} \qquad v = C\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

El análisis dimensional nos permite describir la forma de la ecuación, pero la constante de proporcionalidad C, no puede ser obtenida. El valor de la constante depende de las propiedades físicas del gas. Por ejemplo, se sabe que si el gas es aire, el valor de la constante es 1.18.

	Unidades	Dim.
Velocidad	m/s	LT^{-1}
Densidad	kg/m^3	ML^{-3}
Presión	N/m^2	$ML^{-1}T^{-2}$

Respuesta:

$$\boxed{v = C\sqrt{\frac{P}{\rho}}}$$

PR-1.21. *Fricción del aire sobre un cuerpo móvil*

La fuerza de rozamiento que ejerce el aire sobre un objeto en movimiento depende del área de su sección transversal a la línea del movimiento, A, de la densidad ρ del aire y de la velocidad v de dicho objeto.

Usando un análisis dimensional deduzca una expresión para la fuerza de rozamiento en términos de ρ, A y v.

Solución: La expresión para la fuerza de resistencia del aire sobre el objeto es de la forma:

$$F_r \propto A^p \rho^q v^r$$

Escribiendo las dimensiones de cada magnitud física en ambos miembros de la expresión, tenemos:

$$[F_r] = [A]^p [\rho]^q [v]^r$$

Sustituyendo las dimensiones que se muestran en la tabla correspondiente a A, ρ y v:

$$(MLT^{-2}) = (L^2)^p (ML^{-3})^q (LT^{-1})^r$$

Si igualamos los exponentes que ocurren a ambos lados de la ecuación, se obtienen tres ecuaciones:

Para la masa M: $1 = q$

Para la longitud L: $1 = 2p - 3q + r$

Para el tiempo T: $-2 = -r$

La solución de este sistema de tres ecuaciones simultáneas es:

$$p = 1, \quad q = 1, \quad r = 2$$

Por lo tanto la relación buscada para la fuerza de rozamiento es:

$$F_r = C A \rho v^2$$

La constante C es adimensional. Esta dependencia de la fuerza de resistencia del aire con el cuadrado de la rapidez es la que se observa en objetos grandes como los aviones, los paracaídas y las pelotas de béisbol.

	Unidades	Dimensión
Fuerza	N	MLT^{-2}
Area	m^2	L^2
Densidad	kg/m^3	ML^{-3}
Velocidad	m/s	LT^{-1}

Respuesta:

$$\boxed{F_r = C A \rho v^2}$$

PR-1.22. ***Escalamiento y velocidad terminal***

En el problema anterior, encontramos que la fuerza de rozamiento que ejerce el aire sobre un objeto que cae libremente aumenta con el cuadrado de su velocidad instantánea v.

$$F_r = C A\rho v^2$$

Cuando el valor de la fuerza de rozamiento es igual al peso, el cuerpo alcanza una velocidad terminal constante.

a) Compare la velocidad terminal de dos objetos de igual forma siendo uno de ellos λ veces mas grande que el otro.
b) Si un hombre se lanza al vacío y alcanza una velocidad terminal de 60 m/s, ¿cuál sería la velocidad terminal aproximada de un gato que sea 10 veces mas pequeño?

Solución: a) Cuando un objeto cae en un fluido, actúan dos fuerzas opuestas: la de gravedad Mg, y la fuerza viscosa del fluido F_r. Esta última es ejercida sobre el objeto por las moléculas del fluido que chocan con su superficie, y aumenta con el área y con la velocidad del objeto. La fuerza viscosa aumenta hasta que el objeto alcanza una velocidad *terminal* para la cual el peso del objeto es equilibrado por la fuerza de rozamiento:

$$Mg = F_r = C A\rho v^2$$

Despejando, se obtiene la velocidad terminal:

$$v_t = \sqrt{\frac{Mg}{C\rho A}}$$

Si tenemos dos objetos de igual forma, uno con dimensiones lineales λ veces mayor que el otro, se cumple:

Para las masas: $M_2 = \lambda^3 M_1$

Para la áreas: $A_2 = \lambda^2 A_1$

De modo que la relación entre las velocidades terminales es:

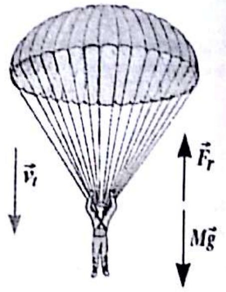
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{M_2 g/C\rho A_2}{M_1 g/C\rho A_1}} = \sqrt{\frac{M_2 A_1}{M_1 A_2}} = \sqrt{\lambda}$$

b) La velocidad terminal del gato sería del orden de:

$$v_g = \frac{v_h}{\sqrt{\lambda}} = \frac{60\text{m/s}}{\sqrt{10}} = 19{,}0\text{m/s}$$

Algunas velocidades terminales

Objeto	*v (m/s)*
hombre	60
Pelota de beisbol	33
Balón de baloncesto	20
Pelota de ping pong	9
Gota de lluvia	7
Hombre con Paracaidas	5



Respuesta:

a) $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\lambda}$
b) Hombre: 60,0 m/s
gato: 19,0 m/s

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. ***¿Verdadero o Falso?***

¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no es correcta* ?

a) La dimensión de una magnitud física no depende del sistema de unidades.
b) Dos magnitudes físicas que han de sumarse deben tener las mismas dimensiones.
c) Dos magnitudes físicas que han de multiplicarse deben tener las mismas dimensiones.
d) Para que una ecuación describa una situación física no basta que sea dimensionalmente correcta.
e) Puede ocurrir que dos magnitudes físicas diferentes tengan las mismas dimensiones.

PE-1.02. ***¿Cuánto tiempo habrá que esperar?***

Un reloj tiene la hora correcta y se atrasa en un segundo por mes, ¿cuánto tiempo habrá que esperar para que vuelva a dar la hora correcta ?

a) 1,2 años b) 60 años c) 480 años
d) 1200 años e) 3600 años

PE-1.03. ***¿ Qué tardará más ?***

a) Una clase de 50 minutos (durante la hora de almuerzo).
b) Un microsiglo.
c) 10^{-3} meses.
d) 4000 latidos del corazón.
e) La luz en viajar del Sol a la Tierra.

PE-1.04. ***Operación Imposible***

Suponga que A y B son magnitudes físicas que tienen diferentes dimensiones. ¿Cuál de las siguientes operaciones *no puede ser posible*?

a) A/B b) AB c) $(1 - A/B)$ d) $\sqrt{B/A}$ e) $(B/A)^2$

PE-1.05. ***Cifras significativas en multiplicaciones y divisiones***

En las siguientes operaciones, ¿Cuál de los resultados tiene un número *incorrecto* de cifras significativas ?

a) $(35,252 \times 2,4)\,/\,14,26 = 5,9$

b) $3,002 \times 1,17 = 3,512$

c) $523 \times 1185 = 6,20 \times 10^5$

d) $(2,48 \times 10^3)/(1,24 \times 10^8) = 2,00 \times 10^{-5}$

PE-1.06. ***Cifras significativas en sumas y restas***

En las siguientes operaciones:

a) $3,59 - 3,56 = 3,00 \times 10^{-2}$

b) $3525,2 + 0,0948 + 342,63 = 3867,9$

c) $27,524 + 2,4 - 3,56 = 26,4$

d) $2,138 + 1,07 \times 10^{-2} + 4,1357 \times 10^2 = 4,1572 \times 10^2$

¿Cuál de los resultados tiene un número *incorrecto* de cifras significativas?

PE-1.07. ***¿Dimensionalidad incorrecta?***

¿Cuál de las siguientes ecuaciones es *incorrecta* desde el punto de vista de su dimensionalidad?

a) $t = \sqrt{2x/a}$

b) $v = (x/t)\, e^{-5t/x}$

c) $x = v^2/(2a)$

d) $v = (at)\, sen\,(vt/3x)^2$

e) $a = (8v/t)\cos\,(vt/x)^{1/2}$

x = longitud,
v = velocidad
a = aceleración
t = tiempo

Las constantes numéricas, incluída e, son adimensionales.

PE-1.08. ***¿Cuánto costará una pizza más grande?***

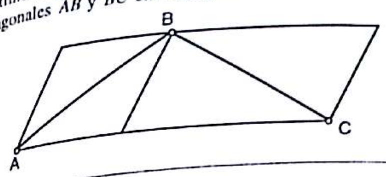
Si una pizza de 20 cm de diámetro cuesta Bs 20 000, cuánto debería costar una pizza con los mismos ingredientes, de igual grosor pero de 30 cm de diámetro ?

a) Bs. 30 000 b) Bs. 35 000 c) Bs. 40 000

d) Bs. 45 000 e) Bs. 60 000

PE-1.09. ***Pura ilusión***

Estime la relación que guardan las longitudes de las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en esta figura:



a) $\overline{AB} = \overline{BC}$
b) $\overline{AB} = 0.5\overline{BC}$
c) $\overline{AB} = 0.75\overline{BC}$
d) $\overline{AB} = 0.85\overline{BC}$

* Después de haber hecho tu elección, mide las diagonales con una regla. ¡Te sorprenderás!

PE-1.10. ***Tiempo que tarda en llenarse el recipiente***

Un recipiente se llena con agua de un grifo en 4 minutos. Cuando el recipiente está lleno, se cierra el grifo y se le saca un tapón de desagüe. El recipiente tarda 6 minutos en vaciarse. ¿Si se vierte el agua mientras está abierto el agujero de desagüe, cuánto tiempo tarda en llenarse el recipiente completamente?

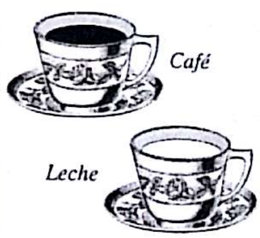
a) 10 minutos, b) 12 minutos, c) 16 minutos.

d) 24 minutos, e) nunca se llenará.

PE-1.11. ***Café con leche y leche con café.***

Una taza contiene café y otra taza contiene igual cantidad de leche. Se toma una cuchara de café de la primera y se echa en la segunda taza, mezclándose con la leche. A continuación se toma una cucharada de la mezcla obtenida en la segunda taza y se devuelve a la primera. El resultado final es que:

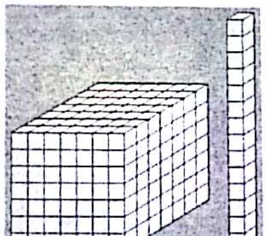
a) Hay mas leche en la primera que café en la segunda.
b) Hay menos leche en primera que café en la segunda.
c) hay tanta leche en la primera como café en la segunda.



PE-1.12. ***De un metro cúbico a una torre de cubitos***

Suponga que a un cubo de un metro de lado lo dividimos en cubitos de 1 milímetro de lado. Si se pusieran todos los cubitos uno encima de otro, ¿qué altura alcanzaría la torre de cubitos?

a) 10 m, b) 100 m, c) 1 km, d) 10 km, e) 1000 km.



PE-1.13. ***El balón tiene 20 hexágonos y 12 pentágonos***

El balón de fútbol está constituido por 32 caras en forma de polígonos regulares: 20 caras son hexágonos blancos y 12 caras son pentágonos negros. ¿Cuántas costuras (o aristas) tendrá el balón?

a) 32 b) 64 c) 90 d) 120 e) 180

PE-1.14. ***16 Diciembre 1999: La tragedia de Vargas***

Noticia de prensa:.....en el litoral del estado vargas la precipitación pluvial acumulada durante estos últimos dos días del 15 y 16 de Diciembre, llegó a la impresionante cifra de cerca de 800 *milímetros*. Estas precipitaciones son producto del desplazamiento de una onda tropical interactuando con la zona de convergencia intertropical, que ha afectado a gran parte del territorio nacional y al Mar Caribe...

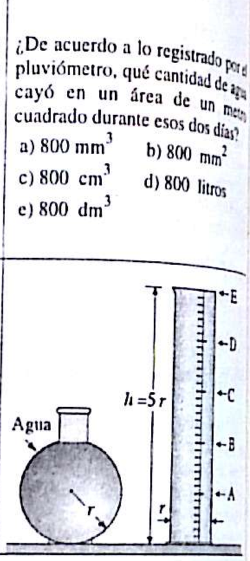
¿De acuerdo a lo registrado por el pluviómetro, qué cantidad de agua cayó en un área de un metro cuadrado durante esos dos días?

a) 800 mm^3 b) 800 mm^2
c) 800 cm^3 d) 800 litros
e) 800 dm^3

PE-1.15. ***De un recipiente esférico a uno cilíndrico***

En una demostración de física, llenamos con agua un balón esférico de vidrio de radio r. Luego vamos trasvasando esta agua a un recipiente de vidrio cilíndrico de diámetro r y altura $5r$. Se pregunta a la audiencia, ¿hasta qué nivel llegará el líquido en el cilindro?

a) Entre A y B, b) Entre B y C, c) Entre C y D
d) Entre D y E. e) Sobrepasa E.



CAP. 1: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
1.01			✓		
1.03				✓	
1.05		✓			
1.07		✓			
1.09	✓				
1.11			✓		
1.13			✓		
1.15					✓

	a	b	c	d	e
1.02					✓
1.04			✓		
1.06	✓				
1.08				✓	
1.10		✓			
1.12					✓
1.14				✓	

2

VECTORES

En física e ingeniería nos encontramos con diversas magnitudes físicas que quedan especificadas con sólo dar su medida en una determinada unidad, estas son las llamadas *magnitudes escalares*, ejemplo, la masa, el tiempo, la presión y la temperatura. Existen también *magnitudes vectoriales*, como el desplazamiento, la velocidad, la fuerza; para las cuales no basta asociar sólo un número y su unidad, sino también, indicar su dirección y su sentido en el espacio. Hay otras magnitudes físicas más complejas, como los *tensores* que son una generalización de escalares y vectores; ejemplo de éstas son el esfuerzo mecánico y eléctrico y la inercia de rotación. En este capítulo vamos a estudiar los vectores. Las ecuaciones vectoriales permiten expresar las leyes físicas en una forma simple y concisa, indicando no sólo la relación matemática entre magnitudes físicas sino también su relación geométrica. Además, las leyes físicas que están representadas por ecuaciones vectoriales son independientes de cualquier elección particular del sistema de coordenadas. Nos limitaremos a revisar las operaciones algebraicas usuales entre vectores, sin profundizar sobre la naturaleza del álgebra vectorial, sobre todo haremos hincapié sobre aquellos aspectos de aplicaciones geométricas.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Magnitudes vectoriales
- Suma y resta de vectores
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Producto Mixto

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

MAGNITUDES VECTORIALES

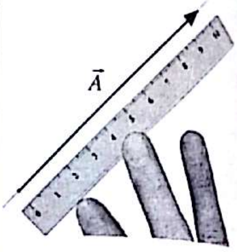
Una magnitud vectorial, está completamente especificada por un módulo, más una dirección y un sentido.

El módulo: es su valor numérico en unidades apropiadas.

La *dirección*: está definida por una recta soporte.

El *sentido*: determina hacia cuál lado de la recta, apunta.

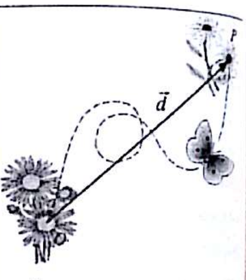
Un vector, se representa geométricamente mediante una flecha o segmento orientado, en el cual se ha establecido un orden para sus puntos extremos.



VECTOR DESPLAZAMIENTO

En física, el caso más común de magnitudes vectoriales es el *desplazamiento* de una partícula desde un punto O hasta otro punto P a lo largo de alguna trayectoria. Este vector desplazamiento, $\vec{d}$, se representa por una flecha, a lo largo de la línea directa del punto inicial O al punto final P. La punta de la flecha representa el sentido y su longitud representa el módulo del desplazamiento.

Además de tener módulo, dirección y sentido, una magnitud vectorial debe cumplir las reglas de adición de vectores.



$\vec{d}$ = *Vector desplazamiento*

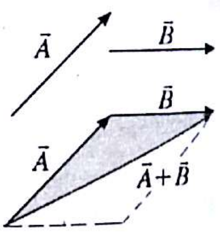
ADICIÓN VECTORIAL

Dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden sumarse en forma geométrica, llevando $\vec{B}$ paralelamente a si mismo hasta que su origen coincida con la punta del vector $\vec{A}$. El vector que va desde el origen de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$ es el vector suma ($\vec{A}+\vec{B}$).

De modo similar, podemos sumar mas de dos vectores:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

El vector suma resultante $\vec{R}$ es el vector que completa el polígono, es decir, se dibuja desde el origen del primer vector hasta la punta del último vector.



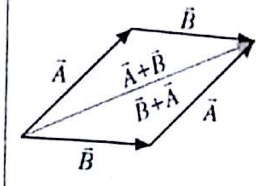
La adición vectorial tiene las siguientes propiedades:

Ley conmutativa: El vector resultante es independiente del orden de la adición:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

Ley asociativa: Si tres o mas vectores se suman, el vector resultante es independiente de la manera en que se agruparon los vectores individuales.

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

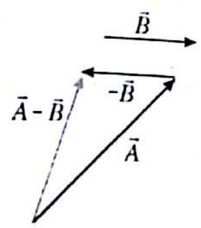


SUBSTRACCIÓN VECTORIAL

Para restar un vector, $\vec{B}$, de otro, $\vec{A}$, en forma geométrica, sumamos a éste el negativo de $\vec{B}$:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

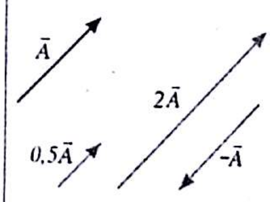
El vector diferencia resulta al unir los orígenes de los vectores minuendo y sustraendo.



MULTIPLICACIÓN DE VECTOR POR ESCALAR

Un vector puede ser multiplicado por un número (escalar) para aumentar o disminuir su módulo. El resultado de esta operación es otro vector, cuyo módulo es el producto del módulo del vector por el escalar y cuya dirección es la misma del vector.

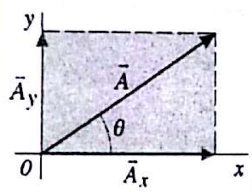
Si el escalar multiplicativo es negativo, el vector resultante tiene sentido opuesto al vector dado (ver figura).



COMPONENTES DE UN VECTOR

Un vector se puede considerar como la suma de un número cualquiera de vectores componentes. En particular, podríamos expresarlo en términos de componentes mutuamente perpendiculares. En el plano xy, el vector $\vec{A}$ tiene dos componentes mutuamente perpendiculares: $\vec{A}_x$, que es su proyección sobre el eje x y $\vec{A}_y$, que es su proyección sobre el eje y.

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,sen\,\theta$$



Componentes cartesianas de un vector

El vector expresado en componentes es:

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

Del triángulo rectángulo formado por el vector y sus dos componentes, se deduce que la magnitud de $\bar{A}$ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

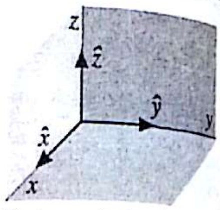
Módulo: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Dirección: $tg\theta = A_y / A_x$

VECTORES UNITARIOS

Un vector unitario o *versor* es un vector que no tiene dimensiones físicas y su módulo es la unidad. Su única función es especificar una dirección particular.

Para identificar los vectores unitarios usaremos un sombrerito encima de una letra. Así por ejemplo: los vectores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ o $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares a lo largo de los ejes rectangulares cartesianos x, y, z respectivamente.



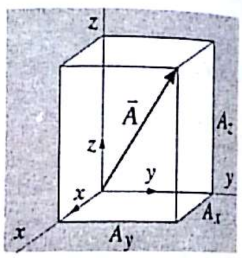
Vectores unitarios $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Los vectores unitarios resultan de gran utilidad para expresar en el espacio cualquier vector, $\bar{A}$, en términos de sus componentes según los ejes de coordenadas. En el sistema cartesiano:

$$\bar{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

Siendo $A_x = A\cos\theta_x$, $A_y = A\cos\theta_y$ y $A_z = A\cos\theta_z$, las proyecciones de $\bar{A}$ sobre los correspondientes ejes de coordenadas y lo especifican en forma única y completa:

$$\bar{A} = (A_x, A_y, A_z).$$



SUMANDO VECTORES POR COMPONENTES

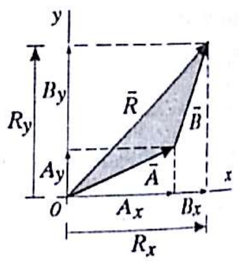
Para sumar vectores, se procede a sumar sus componentes según cada eje por separado:

$$\bar{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \qquad \bar{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y}$$

El módulo del vector $\bar{R}$ resultante es:

$$R = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

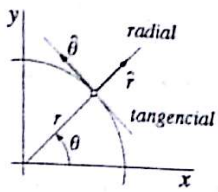


REPRESENTACIÓN POLAR

Para ciertas situaciones físicas son mas apropiados otros sistemas de coordenadas. Así por ejemplo, en el sistema de *coordenadas polares planas* se escogen como direcciones mutuamente perpendiculares, la dirección radial y la dirección tangencial a ésta. En términos de los vectores unitarios correspondientes $(\hat{r}, \hat{\theta})$ se puede representar un vector $\bar{A}$ en la forma:

$$\bar{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta}$$

Esta representación será de particular utilidad cuando estudiemos el movimiento circular.



Vectores unitarios polares: $(\hat{r}, \hat{\theta})$

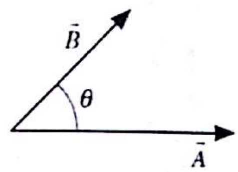
PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores, $\bar{A} \bullet \bar{B}$ se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo θ que estos vectores forman entre sí. Es decir,

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = AB\cos\theta$$

- El producto escalar es un número real que será positivo si $\theta < 90°$ y negativo si $\theta > 90°$.

- Si $\bar{A} \bullet \bar{B} = 0$, siendo $\bar{A} \neq 0$ y $\bar{B} \neq 0$, entonces los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son perpendiculares entre sí.



Si tenemos dos vectores expresados en componentes cartesianas:

$$\bar{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\bar{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

Al efectuar el producto escalar:

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \bullet (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

Como los vectores unitarios son ortogonales, se cumple: $\hat{x}\bullet\hat{x} = \hat{y}\bullet\hat{y} = \hat{z}\bullet\hat{z} = 1$, y $\hat{x}\bullet\hat{y} = \hat{y}\bullet\hat{z} = \hat{z}\bullet\hat{x} = 0$. Por lo tanto:

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Productos escalares de vectores unitarios

$$\hat{x}\bullet\hat{x} = \hat{y}\bullet\hat{y} = \hat{z}\bullet\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}\bullet\hat{y} = \hat{y}\bullet\hat{z} = \hat{z}\bullet\hat{x} = 0$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

PRODUCTO VECTORIAL

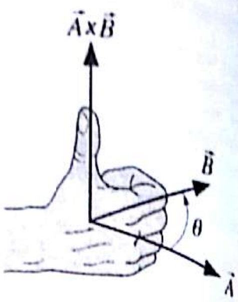
El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A}\times\vec{B}$ (que se lee $\vec{A}$ cruz $\vec{B}$), es un vector con las características siguientes:

• El *módulo* de $\vec{A}\times\vec{B}$ es el producto de los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del ángulo que forman:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,sen\theta$$

• La *dirección* es la de la recta perpendicular a ambos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

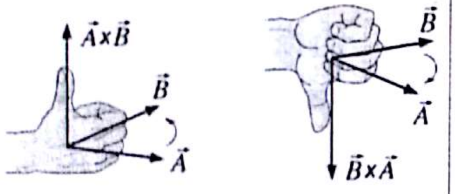
• El *sentido* está determinado por la regla de la mano derecha, según se ilustra en la figura.



Regla de la mano derecha

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

• El producto vectorial *no es conmutativo*: Esto significa que el orden de multiplicación *sí* altera el producto.



No es conmutativo

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

• El producto vectorial es distributivo:

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

Es distributivo

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

Si escribimos los vectores en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

Tomando en cuenta las relaciones para productos vectoriales de vectores unitarios, obtenemos la siguiente expresión para el producto vectorial de $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}$$

Productos vectoriales de vectores unitarios

$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$$
$$\hat{x}\times\hat{y} = -\hat{y}\times\hat{x} = +\hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = -\hat{z}\times\hat{y} = +\hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = -\hat{x}\times\hat{z} = +\hat{y}$$

Podemos poner esta expresión en la forma compacta de un determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

PRODUCTO MIXTO

El producto mixto de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es un escalar que resulta de la siguiente operación:

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\bullet\vec{B}\times\vec{C}$$

Omitimos el paréntesis ya que se sobreentiende que efectuamos primero el producto $\vec{B}\times\vec{C}$ y luego el vector que resulta lo multiplicamos en forma escalar con el vector $\vec{A}$, resultando un escalar. La operación $(\vec{A}\bullet\vec{B})\times\vec{C}$ no está definida.

El producto mixto tiene una interpretación geométrica sencilla, ya que representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores: $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ (ver problema PR-2.14).

Producto mixto expresado como determinante

$$\vec{A}\bullet\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

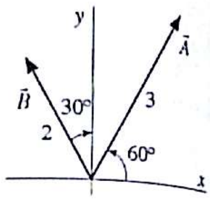
PR-2.01. ***Vector suma y vector diferencia.***

Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuyos los módulos (en metros) y direcciones respecto al eje y (en grados) están indicados en la figura

Halle la suma: $(\vec{A}+\vec{B})$ y la diferencia $(\vec{A}-\vec{B})$

b) Use el método gráfico.

a) Use el método algebraico.



Solución: a) Para obtener gráficamente el vector suma $(\vec{A}+\vec{B})$, se dibuja el vector $\vec{A}$ con su cola en el origen O. A continuación se dibujan *mini-ejes* en su punta, los cuales sirven de guía para dibujar el vector $\vec{B}$ con su dirección y sentido apropiados. El vector suma va desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$. (Fig. 1)

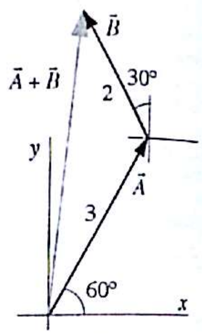


Fig. 1

Para obtener gráficamente el vector diferencia $(\vec{A}-\vec{B})$, se procede similarmente, pero en este caso se dibuja el vector *negativo* de $\vec{B}$ con su cola en la punta del vector $\vec{A}$. El vector diferencia va desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta del negativo de $\vec{B}$. (Fig. 2)

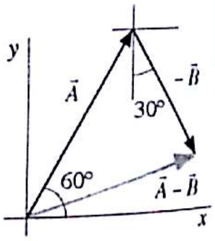


Fig. 2

b) Para efectuar las operaciones algebraicas, debemos expresar los vectores en términos de sus componentes:

	x (m)	y (m)
$\vec{A}$:	$A_x = 3\cos 60° = 1{,}50$	$A_y = 3\text{sen}60° = 2{,}60$
$\vec{B}$:	$B_x = -2\text{sen}30° = -1{,}00$	$B_y = 2\cos 30° = 1{,}73$

Es decir: $\vec{A} = (1{,}50\,\hat{x} + 2{,}60\,\hat{y})$ m

$\vec{B} = (-1{,}00\,\hat{x} + 1{,}73\,\hat{y})$ m

Efectuando la operación suma:

$$\vec{A}+\vec{B} = (1{,}50-1{,}00)\hat{x} + (2{,}60+1{,}73)\hat{y}$$

$$\vec{A}+\vec{B} = (0{,}50\hat{x} + 4{,}33\hat{y})\text{ m}$$

El módulo del vector suma es :

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{0{,}50^2 + 4{,}33^2} = 4{,}36\text{ m}$$

y su dirección (ángulo con el eje x) es:

$$tg\theta = \frac{4{,}33}{0.5} = 8{,}66 \quad \Rightarrow \quad \theta = 83{,}4°$$

De manera similar, efectuamos la operación substracción:

$$\vec{A}-\vec{B} = (1{,}50+1{,}00)\hat{x} + (2{,}60-1{,}73)\hat{y}$$

$$\vec{A}-\vec{B} = (2{,}50\hat{x} + 0{,}87\hat{y})\text{ m}$$

El módulo y dirección(ángulo con el eje x) son:

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{2.50^2 + 0{,}87^2} = 2{,}65\text{ m}$$

$$tg\phi = \frac{0{,}87}{2.5} = 0{,}348 \quad \Rightarrow \quad \phi = 19{,}2°$$

Respuesta:

$\vec{A}+\vec{B} = (0{,}50\hat{x} + 4{,}33\hat{y})$ m
$\vec{A}-\vec{B} = (2{,}50\hat{x} + 0{,}87\hat{y})$ m

PR-2.02. ***Sumando vectores de igual módulo y desfase***

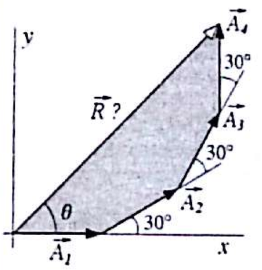
Los cuatro vectores mostrados todos tienen igual módulo

$$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = |\vec{A}_3| = |\vec{A}_4| = 5$$

y están orientados consecutivamente con una diferencia angular de 30°. Determine el vector suma:

a) En componentes rectangulares

b) En módulo y dirección.



Solución: a) Expresamos cada uno de los vectores $\vec{A}_i$ en término de sus componentes rectangulares:

$\vec{A}_1 = 5\hat{x}$

$\vec{A}_2 = 5\cos 30°\,\hat{x} + 5\text{sen}30°\,\hat{y} = 4{,}33\hat{x} + 2{,}50\hat{y}$

$\vec{A}_3 = 5\cos 60°\,\hat{x} + 5\text{sen}60°\,\hat{y} = 2{,}50\hat{x} + 4{,}33\hat{y}$

$\vec{A}_4 = 5\cos 90°\,\hat{x} + 5\text{sen}90°\,\hat{y} = 5{,}00\hat{y}$

Luego efectuamos la suma de sus componentes por separado:

Como $R = 0{,}3$ m, tenemos:

$$\vec{D} = (0{,}94\hat{x} + 0{,}60\hat{y})\ \text{m}$$

El módulo de este vector es:

$$D = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = R\sqrt{\pi^2 + 2^2} = 1{,}12\ \text{m}$$

Su dirección (ángulo respecto del eje x) es:

$$tg\phi = \frac{D_y}{D_x} = \frac{2R}{\pi R} = 0{,}637 \quad \Rightarrow \quad \phi = 32{,}5°$$

b) Si la rueda da una vuelta completa, el punto P se desplaza en una distancia horizontal igual a la longitud de la circunferencia ($2\pi R$), pero no se desplaza verticalmente. Por lo tanto el vector desplazamiento es:

$$\vec{D} = 2\pi R\hat{x}$$

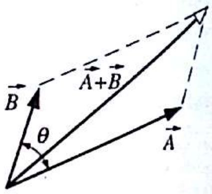
Respuesta:

a) $\vec{D} = (0{,}94\hat{x} + 0{,}60\hat{y})$ m
b) $\vec{D} = 2\pi R\hat{x}$

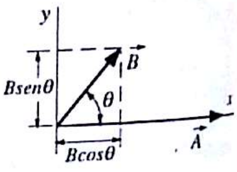
PR-2.05. *El módulo de la suma de dos vectores*

Dos vectores de magnitudes A y B forman un ángulo θ entre sí cuando son colocados cola con cola. Pruebe que el módulo de la suma es:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta}$$



Solución: Si orientamos los e[illegible] coordenadas de tal forma que uno de los vectores (el $\vec{A}$) quede alineado con el eje x, podemos escribir:



$$\vec{A} = A\hat{x}$$

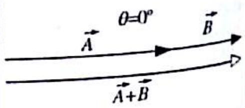
$$\vec{B} = (Bcos\theta)\hat{x} + (Bsen\theta)\hat{y}$$

Sumando los dos vectores, se obtiene:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A + Bcos\theta)\hat{x} + (Bsen\theta)\hat{y}$$

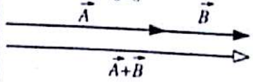
El módulo de la suma es:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(A + Bcos\theta)^2 + (Bsen\theta)^2}$$



$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2(cos^2\theta + sen^2\theta) + 2ABcos\theta}$$

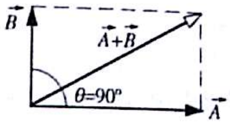
$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta}$$



Considerando los tres casos particulares:

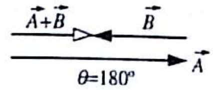
i) Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ alineados: ($\theta = 0°$, $cos\theta = +1$)

$$|\vec{A} + \vec{B}| = A + B$$



ii) Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ ortogonales: ($\theta = 90°$, $cos\theta = 0$)

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$



iii) Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ opuestos:($\theta = 180°$, $cos\theta = -1$)

$$|\vec{A} + \vec{B}| = A - B$$

Respuesta:

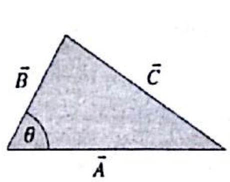
$$\boxed{|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta}}$$

PR-2.06. *El teorema del coseno mediante vectores*

Demuestre mediante el cálculo vectorial, el teorema del coseno para los triángulos:

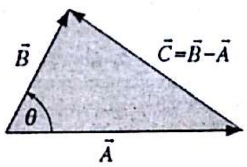
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2ABcos\theta$$

Siendo A, B y C los lados del triángulo y θ el ángulo entre los lados A y B. Considere los casos:
i) $\theta = 90°$, ii) $\theta > 90°$, iii) $\theta < 90°$



Solución: Considerando el vector diferencia:

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$



El producto escalar de este vector consigo mismo es:

$$\vec{C}\bullet\vec{C} = (\vec{B} - \vec{A})\bullet(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{B}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\vec{A} - \vec{A}\bullet\vec{B} - \vec{B}\bullet\vec{A}$$

$$\vec{C}\bullet\vec{C} = \vec{A}\bullet\vec{A} + \vec{B}\bullet\vec{B} - 2\vec{A}\bullet\vec{B}$$

Como los productos escalares son justamente los cuadrados de los módulos de los vectores respectivos, se obtiene:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2ABcos\theta \qquad \text{(cqd)}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2ABcos\theta$$

Considerando los tres distintos triángulos formados:

$$\vec{R} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$$
$$\vec{R} = (5{,}00 + 4{,}33 + 2{,}50)\hat{x} + (2{,}50 + 4{,}33 + 5{,}00)\hat{y}$$
$$\vec{R} = 11{,}8\hat{x} + 11{,}8\hat{y}$$

b) El módulo y la dirección del vector $\vec{R}$, son respectivamente:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{11{,}8^2 + 11{,}8^2} = 16{,}7$$

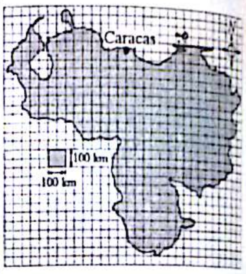
$$tg\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{11{,}8}{11{,}8} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45° \text{ (respecto al eje } x\text{)}$$

Respuesta

a) $\vec{R} = 11{,}8\hat{x} + 11{,}8\hat{y}$
b) $|\vec{R}| = 16{,}7,\ \theta_x = 45°$

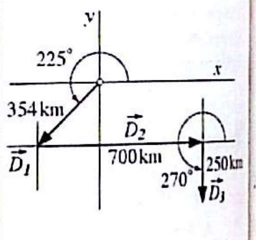
PR-2.03. *¡ Persecución policial !*

En la ciudad de Caracas ocurre un asalto a un banco y los ladrones huyen en un helicóptero, ejecutando tres desplazamientos antes de agotar el combustible. Inicialmente recorren 354 km en dirección Sur-Oeste, luego 700 km en dirección Este y finalmente recorren 250 km en dirección Sur. Si la policía de Caracas quiere atraparlos, ¿en qué dirección debe dirigirse y qué distancia debe viajar? Utilice dos procedimientos:
a) Método analítico. b) Método Gráfico.



Solución: a) En el sistema de coordenadas cartesianas, las componentes x e y de los desplazamientos parciales vienen dadas por:

Módulo	Ángulo	$D_x = Dcos\theta$	$D_y = Dsen\theta$
$D_1 = 354$ km	225°	-250 km	-250 km
$D_2 = 700$ km	0°	+700 km	0
$D_3 = 250$ km	270°	0	-250 km
Resultante		$R_x = +450$ km	$R_y = -500$ km



El módulo del desplazamiento resultante, $\vec{R}$, es:

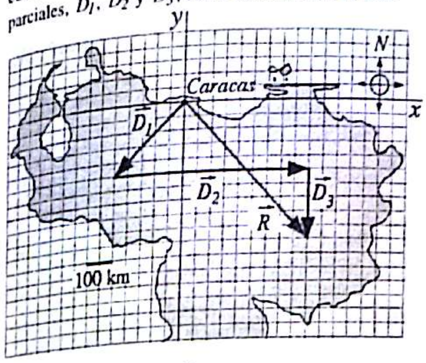
$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{450^2 + 500^2} = 673\text{km}$$

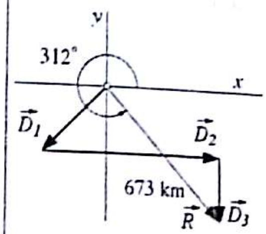
Y la dirección del vector desplazamiento:

$$tg\theta = R_y/R_x = -500/450 = -1{,}11 \quad \Rightarrow \quad \theta = 312°$$

Es decir, $\vec{R}$ apunta en dirección de 48,0° Este-Sur.

b) Procedimiento gráfico: Como el lado de cada cuadrito representa una distancia de 50 km, podemos dibujar cuidadosamente a escala los vectores desplazamientos parciales, $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$ y $\vec{D}_3$, uno a continuación de otro.





El vector resultante $\vec{R}$ se obtiene sumando los desplazamientos parciales, de la manera mostrada:

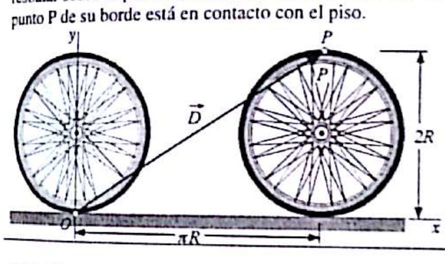
$$\vec{R} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 = 673\text{km} \angle \underline{-48}°$$

Respuesta:

Módulo: $|\vec{R}| = 673$km.
Angulo: $\theta = -48°$

PR-2.04. *Desplazamiento de un punto sobre la rueda*

Una rueda de bicicleta de radio R = 30 cm., rueda sin resbalar sobre el piso horizontal. En un cierto instante un punto P de su borde está en contacto con el piso.



a) ¿Cuál habrá sido el desplazamiento del punto P cuando la rueda haya dado media vuelta?
b) ¿Cuál habrá sido el desplazamiento del punto P cuando la rueda haya dado una vuelta completa?

Solución: a) El punto P se desplaza verticalmente en una distancia igual al diámetro de la rueda ($2R$). Al mismo tiempo, como la rueda no desliza, el punto P se desplaza en una distancia horizontal igual a la mitad de la longitud de la circunferencia (πR). Por lo tanto el vector desplazamiento es:

$$\vec{D} = \pi R\hat{x} + 2R\hat{y}$$

a) $\theta = 90°$: $cos\theta = 0$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ (Tr. Rectángulo)

b) $\theta > 90°$: $cos\theta < 0$, $C > \sqrt{A^2 + B^2}$ (Tr. Obtusángulo)

c) $\theta < 90°$: $cos\theta > 0$, $C < \sqrt{A^2 + B^2}$ (Tr. Acutángulo)

Respuesta

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

PR-2.07. *Desigualdad triangular*

Para dos vectores arbitrarios $\vec{A}$ y $\vec{B}$, demuestre las siguientes desigualdades:

a) $|\vec{A} \bullet \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

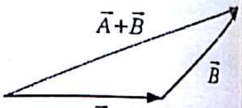
b) (desigualdad triangular)

Solución: a) Partiendo de la definición de producto escalar:

$$|\vec{A} \bullet \vec{B}| = |AB\cos\theta| = AB\,|\cos\theta|$$

y teniendo en cuenta que $|\cos\theta| \leq 1$, encontramos:

$$|\vec{A} \bullet \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$$



Desigualdad triangular:

b) Elevando al cuadrado el módulo de la suma, hallamos:

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = (\vec{A} + \vec{B})(\vec{A} + \vec{B}) = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A} \bullet \vec{B})$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{A} \bullet \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|:$$

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 \leq |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}| = (|\vec{A}| + |\vec{B}|)^2$$

Por lo tanto, se demuestra que: $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$. Es decir, en un triángulo, la suma de las longitudes de dos lados, es mayor o igual a la longitud del tercer lado.

Respuesta

a) $|\vec{A} \bullet \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$
b) $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

PR-2.08. *Condición para perpendicularidad de $\vec{A}$ y $\vec{B}$*

Demuestre que si la suma y la diferencia de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo módulo:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

Entonces, los dos vectores son perpendiculares.

Solución: La relación: $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ implica que:

$$(\vec{A} + \vec{B})^2 = (\vec{A} - \vec{B})^2$$

Es decir:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \bullet (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B}) \bullet (\vec{A} - \vec{B})$$

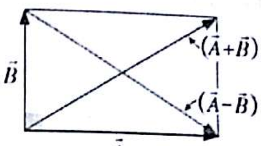
Desarrollando ambos lados de la ecuación:

$$A^2 + 2A \bullet B + B^2 = A^2 - 2\vec{A} \bullet \vec{B} + B^2$$

Simplificando:

$$4\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4AB\cos\theta = 0$$

Por lo tanto: $\theta = 90°$ (a menos que A o B sea un vector nulo). En conclusión, $\vec{A}$ debe ser perpendicular a $\vec{B}$.



Las diagonales de un paralelogramo son iguales, sólo si este es un rectángulo

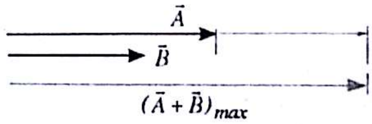
$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ perpendiculares

PR-2.09. *Diferentes combinaciones de vectores*

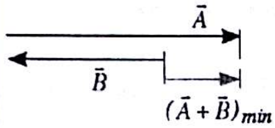
Sean dos vectores: $\vec{A}$ que tiene un módulo de 6 m y $\vec{B}$ que tiene un módulo de 4 m. ¿Cuál debe ser el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si queremos que el módulo de $(\vec{A} + \vec{B})$ tenga:

a) el mayor valor posible? b) el menor valor posible?
c) un valor de 3 m? d) un valor de 8 m?

Solución: a) Para obtener el máximo valor posible de $(\vec{A}+\vec{B})$, los vectores deben tener la misma dirección y sentido. *(Fig. a)*. El máximo valor es (6m + 4m) = 10 m.



b) Para obtener el mínimo valor posible de $|\vec{A}+\vec{B}|$, los vectores deben tener la misma dirección y sus sentidos opuestos, (Fig. b). El mínimo valor es (6 m - 4 m) = 2 m.



(Fig. b)

c) Para que la suma tenga un módulo de 3 m, primero se dibuja a escala el vector $\vec{A}$. Luego se dibuja un arco de radio 3 m con centro en el origen de $\vec{A}$ y un arco de 4 m con centro en la punta de $\vec{A}$ (Fig. c). La intersección de los dos arcos permite ubicar el punto donde estará la punta de $(\vec{A} + \vec{B})$.

Para hallar el ángulo ϕ aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $|\vec{A}+\vec{B}|$.

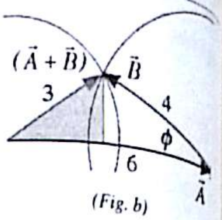
$$(6 - 4\cos\phi)^2 + (4\operatorname{sen}\phi)^2 = 3^2$$

$$\cos\phi = 43/48 \quad \Rightarrow \quad \phi = 26{,}4^\circ$$

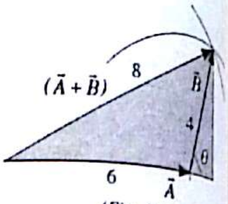
d) Para obtener $|\vec{A}+\vec{B}| = 8$ m, se procede igual que en la parte c. Se dibuja un arco de radio 8 m con centro en el origen de $\vec{A}$ y un arco de 4 m con centro en la punta de $\vec{A}$ (Fig. d). La intersección de los dos arcos permite ubicar el punto donde estará la punta de $(\vec{A}+\vec{B})$. El ángulo θ, se determina aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $|\vec{A}+\vec{B}|$.

$$(6 + 4\cos\theta)^2 + (4\operatorname{sen}\theta)^2 = 8^2,$$

$$\cos\theta = 12/48 \quad \Rightarrow \quad \theta = 75{,}5^\circ$$



(Fig. b)



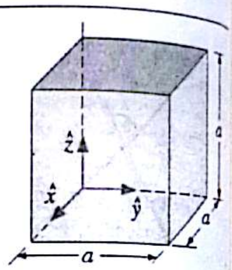
(Fig. d)

PR-2.10. *Ángulos entre las diagonales de un cubo*

Sea un cubo cuyas aristas tienen longitud a.

a) Determine el ángulo que forman dos diagonales internas (las líneas rectas que van de una esquina a otra, a través del centro del cubo).

b) Determine el ángulo que forman las diagonales internas con las aristas adyacentes.



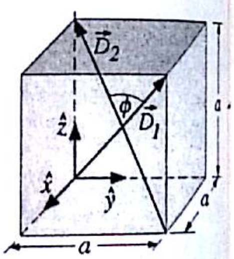
Solución: a) En el cubo existen cuatro diagonales internas que conectan las esquinas caras opuestas. Considerando las dos diagonales mostradas, los vectores que las representan son:

$$\vec{D}_1 = a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}$$
$$\vec{D}_2 = -a\hat{x} - a\hat{y} + a\hat{z}$$

Los módulos de estos vectores son iguales:

$$|\vec{D}_1| = |\vec{D}_2| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$$

Para hallar el ángulo ϕ que forman entre sí tomamos su producto escalar:



$$\vec{D}_1 \bullet \vec{D}_2 = |\vec{D}_1||\vec{D}_2|\cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{D}_1 \bullet \vec{D}_2}{|\vec{D}_1||\vec{D}_2|} = \frac{(a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}) \bullet (-a\hat{x} - a\hat{y} + a\hat{z})}{(\sqrt{3}a)(\sqrt{3}a)}$$

$$\cos\phi = \frac{-a^2 - a^2 + a^2}{3a^2} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \phi = 109{,}5^\circ$$

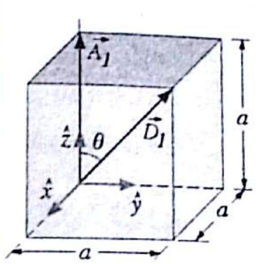
b) Considerando la arista $\vec{A}_1$ en el eje z que es adyacente a la diagonal $\vec{D}_1$:

$$\vec{A}_1 = a\hat{z} \qquad \vec{D}_1 = a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}$$

Tomando el producto escalar: $\vec{A}_1 \bullet \vec{D}_1 = |\vec{A}_1||\vec{D}_1|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}_1 \bullet \vec{D}_1}{|\vec{A}_1||\vec{D}_1|} = \frac{a\hat{z} \bullet (a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z})}{a(\sqrt{3}a)} = \frac{a^2}{a(\sqrt{3}a)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, el ángulo entre $\vec{A}_1$ y $\vec{D}_1$ es $\theta = 54.7^\circ$



Respuesta:

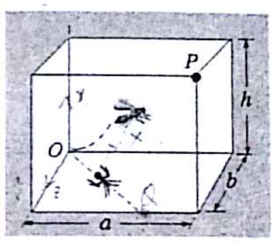
Entre diagonales:	$\phi = 109{,}5^\circ$
Diagonal y arista:	$\theta = 54{,}7^\circ$

PR-2.11. *La mosca y la hormiga: el camino mas corto*

Sea una habitación de paredes, piso y techo rectangulares y cuyas dimensiones son: ancho a, profundidad b y altura h. Desde la esquina O en el piso parten una hormiga y una mosca, en busca de un pedazo de comida que está la esquina P en el techo y diametralmente opuesta.

a) ¿Cuál es el desplazamiento neto de cada una de ellas?

b) ¿Cuál es la longitud del camino más corto que pueden tomar independientemente la hormiga y la mosca?.



Solución: a) Como la *mosca* puede volar, la ruta más corta es evidentemente una línea recta (la diagonal $\overline{OP}$), cuya longitud es:

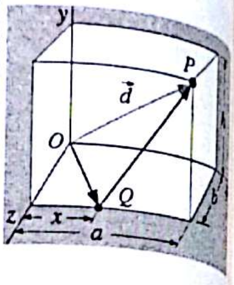
$$L_m = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

La *hormiga* debe caminar primero sobre el piso según una recta, digamos $\overline{OQ}$ y luego sobre la pared opuesta según otra recta, $\overline{QP}$.

En ambos casos, los puntos inicial y final de la hormiga y la mosca son los mismos y el vector desplazamiento será igual:

$$\vec{d}_h = \vec{d}_m = a\hat{x} + h\hat{y} + b\hat{z}$$

b) La ruta más corta que puede seguir la hormiga ya la hemos hallado en el capítulo *1*, utilizando un procedimiento puramente geométrico. Aquí emplearemos un procedimiento mas tedioso basado en el cálculo diferencial. La longitud de la trayectoria de la hormiga en función de x es:



$$L(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h^2}$$

Para un mínimo en L debe cumplirse $dL/dx = 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}} = 0$$

Simplificando:

$$x^2(h^2 - b^2) + x(2ab^2) - a^2b^2 = 0$$

La raíz de esta ecuación cuadrática con sentido físico es:

$$x = \frac{-2ab^2 + \sqrt{(2ab^2)^2 + 4a^2b^2(h^2 - b^2)}}{2(h^2 - b^2)} = \frac{ab}{(h+b)}$$

Sustituyendo esta expresión de la distancia x de vuelta en la expresión para L, se obtiene:

$$L = \sqrt{\left(\frac{ab}{h+b}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(a - \frac{ab}{h+b}\right)^2 + h^2}$$

$$L = \frac{1}{(h+b)}\left[b\sqrt{a^2 + h^2 + 2hb + b^2} + h\sqrt{a^2 + h^2 + 2hb + b^2}\right]$$

$$L = \sqrt{a^2 + h^2 + 2hb + b^2}$$

Respuesta:

a) $\vec{d}_h = \vec{d}_m = a\hat{x} + h\hat{y} + b\hat{z}$

b) $L_m = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

$L_h = \sqrt{a^2 + (b+h)^2}$

PR-2.12. *Triángulos inscritos en un semicírculo*

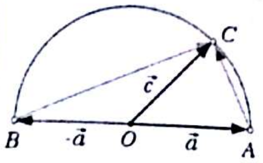
Demuestre que todo triángulo inscrito en un semicírculo debe ser rectángulo.

Solución: Consideremos el triángulo ABC inscrito en el semicírculo de radio a y con centro en O. Sean los vectores radiales:

$$\overline{OA} = \vec{a} = -\overline{OB} \text{ y } \overline{OC} = \vec{c}$$

De modo que sus módulos son: $OA = OB = OC = a = c$.

Entonces los vectores que forman las hipotenusas del triángulo ABC son:



$$\overline{AC} = -\vec{a} + \vec{c} = \vec{c} - \vec{a} \quad \text{y} \quad \overline{BC} = \vec{c} + \vec{a}$$

Tomando el producto escalar, y en virtud de que $c = a$, se obtiene:

$$\overline{AC} \bullet \overline{BC} = (\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{c} + \vec{a}) = c^2 - a^2 = 0$$

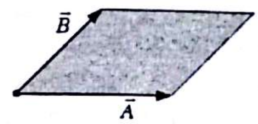
Por lo tanto, el vector $\overline{AC}$ es perpendicular al vector $\overline{BC}$ y queda demostrado que el triángulo BCA, inscrito en el semicírculo es rectángulo.

Respuesta:

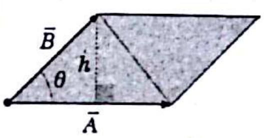
$\boxed{\overline{AC} \perp \overline{BC} \Rightarrow \angle BCA = 90^\circ}$

PR-2.13. *Área de un paralelogramo*

Demostrar que el módulo de un producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es numéricamente igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores componentes como lados.



Solución: Considerando los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como lados del paralelogramo, la altura h representa la proyección del vector $\vec{B}$ que es perpendicular al vector $\vec{A}$. El área del paralelogramo es entonces:



$$Area = Ah = A(B sen\theta) = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{B} \times \vec{A}|$$

Por lo tanto, el área del triángulo formado por los dos vectores y la línea gris que une sus puntas es:

$$A\Delta = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

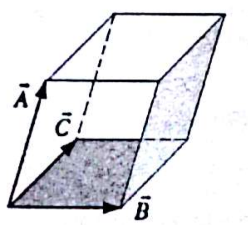
Respuesta:

$\boxed{\text{Área paralelogramo} = |\vec{A} \times \vec{B}|}$

PR-2.14. *Producto mixto y volumen de paralelepípedo*

a) Demuestre que el volumen de un paralelepípedo cuyas aristas están representadas por los vectores: $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, viene dado por el módulo del triple producto: $\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C}$

b) Halle el volumen del paralelepípedo formado por los vectores:



$$\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}, \quad \vec{B} = \hat{y} + \hat{z}, \quad \vec{C} = \hat{x} - \hat{y}$$

Solución: a) De acuerdo al problema anterior, el área de la base del paralelepípedo es:

$$\text{Área de la base } = |\vec B \times \vec C|$$

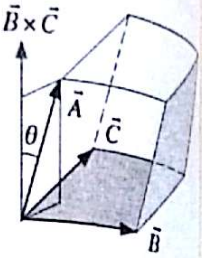
Mientras que la altura del paralelepípedo será:

$$\text{Altura: } h = |\vec A|| \cos\theta|$$

Siendo θ el ángulo entre el vector $\vec A$ y el vector $\vec B \times \vec C$. Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es:

$$\text{Volumen} = (\text{Área base})\ (\text{Altura}) = |\vec A||\vec B \times \vec C|| \cos\theta|$$

que es precisamente el módulo del producto mixto de los tres vectores $\vec A$, $\vec B$ y $\vec C$.



$|\vec A \bullet \vec B \times \vec C|$ = volumen del paralelepípedo

b) Aplicando la expresión para el producto mixto en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$\vec A \bullet \vec B \times \vec C = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

El volumen del paralelepípedo es el módulo de este producto:

$$|\vec A \bullet \vec B \times \vec C| = |1(0+1) - 2(0-1) - 1(0-1)| = 4 \text{ unidades}$$

Respuesta

$$\boxed{V = |\vec A \bullet \vec B \times \vec C| = 4 \text{ unidades}}$$

PR-2.15. *Estos tres vectores quedan en un plano*

a) Demuestre que los tres vectores siguientes quedan en un mismo plano:

$$\vec A = 2\hat x + \hat z, \qquad \vec B = 3\hat y + 4\hat z, \qquad \vec C = 8\hat x - 3\hat y$$

b) Exprese el vector $\vec C$ como una combinación lineal de los vectores $\vec A$ y $\vec B$.

Solución: a) De acuerdo al problema anterior, el producto mixto nos da el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec A$, $\vec B$ y $\vec C$. Si este volumen resulta nulo, ello indica que los vectores quedan en un mismo plano. En efecto:

$$\vec A \bullet \vec B \times \vec C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 8 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2(4\text{x}3) + (1)(-8\text{x}3) = 0$$

b) Podemos escribir la relación vectorial:

$$\vec C = a\vec A + b\vec B$$

$$8\hat x - 3\hat y = a(2\hat x + \hat z) + b(3\hat y + 4\hat z) = 2a\hat x - 3b\hat y + (a + 4b)\hat z$$

Para hallar las constantes, igualamos el valor de cada componente a ambos lados de esta ecuación:

$$2a = 8, \qquad -3b = 3, \qquad a + 4b = 0$$

Encontramos: $a = 4$ y $b = -1$

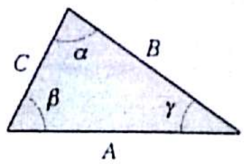
Respuesta

a) $\vec A \bullet \vec B \times \vec C = 0$
b) $\vec C = 4\vec A - \vec B$

PR-2.16. *El teorema del seno mediante vectores*

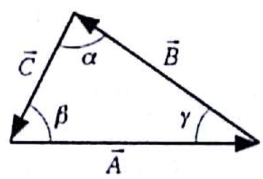
Demuestre mediante el cálculo vectorial el teorema de los senos en los triángulos planos:

$$\frac{A}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{C}{sen\gamma}$$



Solución: Los tres vectores mostrados en la figura forman el triángulo dado y su suma debe ser cero:

$$\vec A + \vec B + \vec C = 0$$



Efectuando el producto vectorial de $\vec A$ por el resultante de la suma:

$$\vec A \times (\vec A + \vec B + \vec C) = \vec A \times \vec A + \vec A \times \vec B + \vec A \times \vec C = 0$$

Como $\vec A \times \vec A = 0$, entonces:

$$\vec A \times \vec B = -\vec A \times \vec C = \vec C \times \vec A \qquad (1)$$

Igualmente, efectuando el producto vectorial de la suma vectorial con $\vec B$ se obtiene:

$$(\vec A + \vec B + \vec C) \times \vec B = \vec A \times \vec B + \vec B \times \vec B + \vec C \times \vec B = 0$$

$$\vec A \times \vec B = -\vec C \times \vec B = \vec B \times \vec C \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que:

$$\bar{A}\times\bar{B}=\bar{C}\times\bar{A}=\bar{B}\times\bar{C}$$

Pero $\bar{A}\times\bar{B}=ABsen(\pi-\gamma)=ABsen\gamma$, etc... Por lo tanto:

$$ABsen\gamma=CAsen\beta=BCsen\alpha$$

Dividiendo por ABC se tiene:

$$\frac{sen\gamma}{C}=\frac{sen\beta}{B}=\frac{sen\alpha}{A}$$

Por lo tanto:

$$\frac{A}{sen\alpha}=\frac{B}{sen\beta}=\frac{C}{sen\gamma} \qquad \text{(cqd)}$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{A}{sen\alpha}=\frac{B}{sen\beta}=\frac{C}{sen\gamma}}$$

PR-2.17. *Seno y coseno de la suma y de la diferencia*

Deduzca las relaciones trigonométricas del seno y del coseno de la suma y diferencia de dos ángulos.

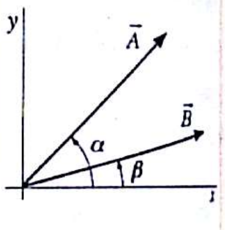
a) $cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha\, cos\beta\mp sen\alpha\, sen\beta$

b) $sen(\alpha\pm\beta)=sen\alpha\, cos\beta\pm cos\alpha\, sen\beta$

Solución: a) Consideremos dos vectores *unitarios*, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ que quedan en el plano xy y forman ángulos α y β respectivamente con el eje de las x. En términos de las componentes rectangulares, estos vectores se pueden expresar en la forma:

$$\bar{A}=cos\alpha\hat{x}+sen\alpha\hat{y}$$

$$\bar{B}=cos\beta\hat{x}+sen\beta\hat{y}$$



Podemos escribir el producto escalar de $\bar{A}$ con $\bar{B}$ de dos maneras diferentes:

$$\bar{A}\bullet\bar{B}=(cos\alpha\hat{x}+sen\alpha\hat{y})\bullet(cos\beta\hat{x}+sen\beta\hat{y})$$

$$\bar{A}\bullet\bar{B}=cos\alpha cos\beta+sen\alpha sen\beta$$

$$\bar{A}\bullet\bar{B}=|\bar{A}||\bar{B}|cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha-\beta)$$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha\, cos\beta+sen\alpha\, sen\beta \qquad \text{(cqd)}$$

También podríamos sustituir en esta expresión β por $-\beta$:

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\, cos\beta-sen\alpha\, sen\beta \qquad \text{(cqd)}$$

b) Considerando las dos formas de expresar el producto vectorial $\bar{A}$ cruz $\bar{B}$, tenemos:

$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ cos\alpha & sen\alpha & 0\\ cos\beta & sen\beta & 0\end{vmatrix}=(cos\alpha sen\beta-sen\alpha cos\beta)\hat{z}$$

$$\bar{A}\times\bar{B}=|\bar{A}||\bar{B}|sen(\alpha-\beta)(-\hat{z})$$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha cos\beta-cos\alpha sen\beta \qquad \text{(cqd)}$$

También podemos sustituir en esta expresión β por $-\beta$:

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta \qquad \text{(cqd)}$$

Respuesta:

a) $cos(\alpha\pm\beta)$
$=cos\alpha\, cos\beta\mp sen\alpha\, sen\beta$

b) $sen(\alpha\pm\beta)$
$=sen\alpha\, cos\beta\pm cos\alpha\, sen\beta$

PR-2.18. *Dos rectas que son paralelas.*

Demuestre que la recta A que pasa por los dos puntos:

A_1 (-1, 4, 2) y A_2 (3, 10, -10)

Es paralela a la recta B que pasa por los dos puntos:

B_1 (4, -1, 5) y B_2 (6, 2, -1)

Solución: Si las rectas son paralelas, los vectores que la definen deben tener la misma dirección, de modo que sus componentes deben ser proporcionales.

Para la recta A, el vector es:

$$\overline{A_1A_2}=[3-(-1)]\hat{x}+(10-4)\hat{y}+(-10-2)\hat{z}=4\hat{x}+6\hat{y}-12\hat{z}$$

Para la recta B, el vector es:

$$\overline{B_1B_2}=(6-4)\hat{x}+[2-(-1)]\hat{y}+(-1-5)\hat{z}=2\hat{x}+3\hat{y}-6\hat{z}$$

Es decir: $\overline{A_1A_2}=2\overline{B_1B_2}$

Como los vectores son proporcionales, las dos líneas rectas deben ser paralelas.

Respuesta:

$\overline{A_1A_2}=2\overline{B_1B_2}$
Las rectas son paralelas

PR-2.19. *Dos rectas que son perpendiculares.*

Demuestre que la recta A que pasa por los dos puntos:

A_1 (4, -1, 5) y A_2 (6, 2, -1)

Es perpendicular a la recta B que pasa por los dos puntos:

B_1 (1, 6, 4) y B_2 (-2, 4, 2)

Solución: Si las rectas son perpendiculares, el producto escalar de los vectores que la definen debe ser nulo.

Para la recta A, el vector es:

$$\overline{A_1A_2} = (6-4)\hat{x} + [2-(-1)]\hat{y} + (-1-5)\hat{z} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 6\hat{z}$$

Para la recta B, el vector es:

$$\overline{B_1B_2} = (-2-1)\hat{x} + (4-6)\hat{y} + (2-4)\hat{z} = -3\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z}$$

Ahora calculamos el producto escalar:

$$\overline{A_1A_2} \bullet \overline{B_1B_2} = (2\hat{x} + 3\hat{y} - 6\hat{z}) \bullet (-3\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z})$$

$$\overline{A_1A_2} \bullet \overline{B_1B_2} = -6 - 6 + 12 = 0$$

Resulta nulo y por lo tanto, las rectas son perpendiculares.

Respuesta:

$\overline{A_1A_2} \bullet \overline{B_1B_2} = 0$
Las rectas son perpendiculares

PR-2.20. *Recta que es paralela a un vector*

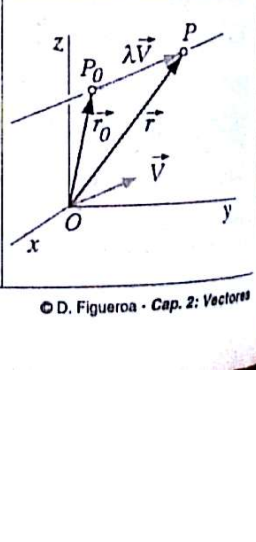
Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto dado P_0(-3, 1, 2) y es paralela al vector:

$$\vec{V} = 2\hat{x} - \hat{y} + 3\hat{z}$$

Solución: *Método a)* Según se ilustra en la figura, el vector de posición $\vec{r}$ de un punto genérico de la recta $P(x,y,z)$ se obtiene sumándole al vector de posición $\vec{r}_0$ del punto fijo P_0, el vector $\lambda\vec{V}$ que es paralelo a dicha recta:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{V}$$

Siendo λ un parámetro. Esta ecuación vectorial equivale a tres ecuaciones escalares para las componentes:



$$x = x_0 + \lambda V_x = -3 + 2\lambda$$
$$y = y_0 + \lambda V_y = 1 - \lambda$$
$$z = z_0 + \lambda V_z = 2 + 3\lambda$$

Despejando el parámetro λ en cada una de estas tres ecuaciones e igualando los resultados, encontramos:

$$\frac{x+3}{2} = 1 - y = \frac{z-2}{3} \quad \text{(ecuación de la recta)}$$

Respuesta:

$$\frac{x+3}{2} = 1 - y = \frac{z-2}{3}$$

PR-2.21. *Vector paralelo a uno y perpendicular a otro*

Dados los tres vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{R}$:

$$\vec{P} = a\hat{x} + 2\hat{y} + b\hat{z}, \quad \vec{Q} = 4\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}, \quad \vec{R} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + c\hat{z}$$

Halle las constantes a, b y c para que el vector $\vec{P}$ sea paralelo a $\vec{Q}$ y al mismo tiempo sea perpendicular a $\vec{R}$.

Solución: Para que los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ sean paralelos, el producto *vectorial* debe ser nulo:

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a & 2 & b \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-2b)\hat{x} - (a-4b)\hat{y} + (2a-8)\hat{z} = 0$$

$$2 - 2b = 0 \;\Rightarrow\; b = 1, \qquad a - 4b = 0 \;\Rightarrow\; a = 4b = 4$$

Por otra parte, para que los vectores $\vec{P}$ y $\vec{R}$ sean perpendiculares, el producto *escalar* debe ser nulo:

$$\vec{P} \bullet \vec{R} = (a\hat{x} + 2\hat{y} + b\hat{z})(2\hat{x} + 3\hat{y} + c\hat{z}) = 0$$

$$2a + 6 + bc = 0 \;\Rightarrow\; c = -\frac{2a+6}{b} = -\frac{2(4)+6}{1} = -14$$

Respuesta:

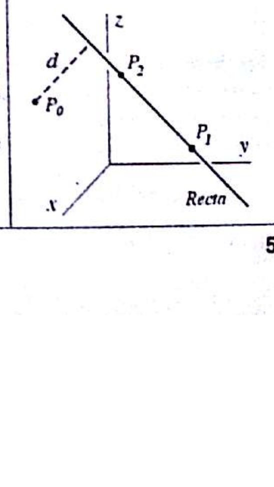
$a = 4, \quad b = 1, \quad c = -14$

PR-2.22. *Distancia de un punto a una recta.*

a) Halle una expresión vectorial para la distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a una línea recta que pasa por los puntos: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

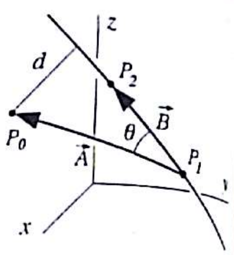
b) Halle la distancia del punto P_0 (3, -3, 1) a la recta que pasa por los puntos :

P_1 (2, 3, 2) y P_2 (4,- 3, 5)



Solución: a) En la figura se muestran los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que conectan los puntos dados:

$$\vec{A} = \overline{P_1P_0} \quad y \quad \vec{B} = \overline{P_1P_2}$$



Considerando el triángulo rectángulo mostrado, se observa que la distancia d buscada es justamente:

$$d = |\vec{A}|\, sen\theta = \frac{|\vec{A}||\vec{B}|\, sen\theta}{|\vec{B}|} = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{B}|}$$

b) Específicamente para los puntos dados se tiene:

$$\vec{A} = \overline{P_1P_0} = [(2\text{-}3)\ \hat{x} + (3+3)\ \hat{y} + (2\text{-}1)\ \hat{z}] = -\hat{x} + 6\hat{y} + \hat{z}$$

$$\vec{B} = \overline{P_1P_2} = [(4\text{-}2)\ \hat{x} + (-3\text{-}3)\ \hat{y} + (5\text{-}2)\ \hat{z}] = 2\hat{x} - 6\hat{y} + 3\hat{z}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 24\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$$

Reemplazando estas expresiones en la fórmula anterior, encontramos:

$$d = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{B}|} = \frac{\sqrt{24^2+5^2+6^2}}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}} = \frac{\sqrt{637}}{\sqrt{49}} = \sqrt{13} \text{ unidades}$$

Respuesta:

a) $d = \dfrac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{B}|}$

b) $d = \sqrt{13}$

PR-2.23. *Distancia entre dos líneas rectas*

Determine la distancia entre dos líneas rectas definidas respectivamente por un punto y un vector a lo largo de ellas:

Recta 1: $P(1,-2,1/2)$ $\quad \vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$

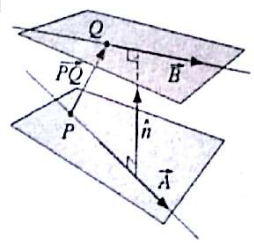
Recta 2: $Q(-2,2,1/2)$ $\quad \vec{B} = -\hat{x} - 2\hat{y}$

Solución: La distancia buscada es la proyección del vector $\overline{PQ}$ a lo largo de un vector unitario $\hat{n}$ que sea perpendicular a ambas rectas. El vector $\overline{PQ}$ que une los puntos P y Q es:

$$\overline{PQ} = (-2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}/2) - (\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}/2) = -3\hat{x} + 4\hat{y}$$

Un vector normal a ambas rectas es:

$$\vec{N} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}$$



y un vector unitario perpendicular es:

$$\hat{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{4\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}} = \frac{4\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{21}}$$

La distancia d entre las dos líneas rectas es la proyección del vector $\overline{PQ}$ sobre el vector unitario $\hat{n}$:

$$d = |\overline{PQ}\bullet\hat{n}| = |(-3\hat{x} + 4\hat{y})\bullet\frac{4\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{21}}| = |\frac{-12-8}{\sqrt{21}}| = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

Respuesta:

$$d = |\overline{PQ}\bullet\hat{n}| = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

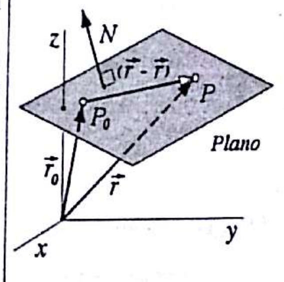
PR-2.24. *Plano que es perpendicular a un vector*

a) Halle la ecuación vectorial de un plano que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular a un vector $\vec{N}$.

b) Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(2,3,0)$ y es perpendicular al vector: $\vec{N} = 3\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}$

Solución: a) Considerando el vector de posición $\vec{r}$ de un punto genérico en el plano $P(x,y,z)$ y el vector de posición $\vec{r}_0$ del punto fijo $P_0(x_0,y_0,z_0)$, podemos formar el vector diferencia $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ el cual estará ubicado en el plano.

Si tomamos el producto escalar de este vector con el vector normal $\vec{N}$, debe dar cero por ser los dos vectores perpendiculares entre si:



$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\bullet\vec{N} = 0$$

Esta es la ecuación vectorial del plano.

b) Reemplazando en esta expresión los vectores:

$$\vec{r}_0 = \overline{OP_0} = 2\hat{x} + 3\hat{y} \qquad \vec{r} = \overline{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\bullet\vec{N} = [(x-2)\hat{x} + (y-3)\hat{y} + z\hat{z}](3\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}) = 0$$

$$(x-2)(3)+(y-3)(-4)+z(1)=0$$

$$3x-4y+z=-6$$

Esta ecuación define el plano que es perpendicular al vector $(3\hat{x}-4\hat{y}+\hat{z})$ y pasa por el punto $(2,3,0)$.

Respuesta

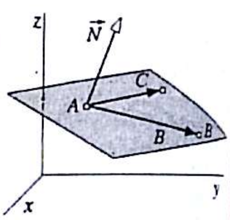
a) $(\vec{r}-\vec{r}_0)\bullet\vec{N}=0$
b) $3x-4y+z=-6$

PR-2.25. *Plano que contiene tres puntos*

Halle la ecuación del plano que pasa por los tres puntos siguientes:

$$A(2,1,3)\ ,\ B(0,1,1)\ \text{y}\ C(4,2,1)$$

Solución: a) Como los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ quedan en el plano, su producto vectorial es perpendicular a dicho plano:



$$\overline{AB}=(0-2)\hat{x}+(1-1)\hat{y}+(1-3)\hat{z}=-2\hat{x}-2\hat{z}$$

$$\overline{AC}=(4-2)\hat{x}+(2-1)\hat{y}+(1-3)\hat{z}=2\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}$$

$$\vec{N}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\hat{x}-8\hat{y}-2\hat{z}$$

Si fijamos uno de los puntos, por ejemplo el B, podemos construir el vector $\overline{BP}$ con cualquier punto arbitrario del plano $P(x,y,z)$:

$$\overline{BP}=(x-0)\hat{x}+(y-1)\hat{y}+(z-1)\hat{z}$$

Aplicando la condición de perpendicularidad: $\overline{BP}\bullet\vec{N}=0$

$$[\,x\hat{x}+(y-1)\hat{y}+(z-1)\hat{z}\,]\bullet(2\hat{x}-8\hat{y}-2\hat{z})=0$$

$$2x-8(y-1)-2(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad 2x-8y-2z+10=0$$

Respuesta

$x-4y-z+5=0$

PR-2.26. *Derivada de un vector*

Sea $\vec{A}(t)$ un vector que es una función de un parámetro t. Demostrar que:

a) Si $\vec{A}$ es constante en dirección, entonces: $\vec{A}\times\dfrac{d\vec{A}}{dt}=0$

b) Si $\vec{A}$ es constante en módulo, entonces: $\vec{A}\bullet\dfrac{d\vec{A}}{dt}=0$

Solución: Sea $\hat{A}$ un vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$, es decir: $\hat{A}=\vec{A}/A$. La derivada de $\vec{A}$ es:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d}{dt}(A\hat{A})=A\frac{d\hat{A}}{dt}+\hat{A}\frac{dA}{dt}$$

a) Si $\hat{A}$ es constante en dirección, entonces $\hat{A}$ no varía y tenemos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\hat{A}\frac{dA}{dt}\quad\Rightarrow\quad\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{A}\times\hat{A}\frac{dA}{dt}=\vec{A}\times\vec{A}\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\right)=0$$

b) Si $\vec{A}$ es constante en módulo, entonces A^2 también lo será, y tenemos:

$$\frac{d}{dt}A^2=\frac{d}{dt}(\vec{A}\bullet\vec{A})=\vec{A}\bullet\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\bullet\vec{A}=2\vec{A}\bullet\frac{d\vec{A}}{dt}=0$$

Respuesta

a) $\hat{A}$ constante $\Rightarrow\ \vec{A}\times\dfrac{d\vec{A}}{dt}=0$

b) A constante $\Rightarrow\ \vec{A}\bullet\dfrac{d\vec{A}}{dt}=0$

PR-2.27. *Vector de módulo constante en el tiempo*

Dado el vector: $\vec{A}(t)=a(\cos\omega t\,\hat{x}+\operatorname{sen}\omega t\,\hat{y})$, donde a y ω son constantes y t es el tiempo.

a) Determine el módulo de $\vec{A}$.

b) Demuestre que $\vec{A}$ y $d\vec{A}/dt$ son perpendiculares.

Solución: El módulo del vector $\vec{A}$ es:

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{a^2\cos^2\omega t+a^2\operatorname{sen}^2\omega t}=a$$

Como el módulo de $\vec{A}$ es constante.

b) La derivada de $\vec{A}$ es:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d}{dt}a(\cos\omega t\,\hat{x}+\operatorname{sen}\omega t\,\hat{y})=a\omega(-\operatorname{sen}\omega t\,\hat{x}+\cos\omega t\,\hat{y})$$

Tomemos el producto escalar:

$$\vec{A}\bullet\frac{d\vec{A}}{dt}=a\omega(-\operatorname{sen}\omega t\,\hat{x}+\cos\omega t\,\hat{y})\bullet a(\cos\omega t\,\hat{x}+\operatorname{sen}\omega t\,\hat{y})$$

$$\vec{A}\bullet\frac{d\vec{A}}{dt}=a^2\omega(-\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t+\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t)=0$$

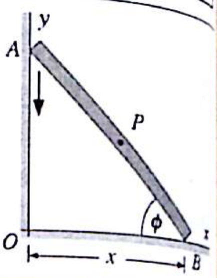
Luego los vectores $\vec{A}$ y $d\vec{A}/dt$ son perpendiculares. Este resultado era de esperar, ya que según el problema anterior, todo vector de módulo constante es siempre perpendicular a su derivada.

Respuesta

a) $|\vec{A}| = a =$ constante
b) $\vec{A}$ y $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ son ortogonales

PR-2.28. *El centro de la escalera describe un arco de circunferencia*

Una escalera AB de longitud L está apoyada con un extremo sobre una pared vertical. Cuando la escalera cae deslizando por la pared y por el piso, demuestre que su punto medio P describe un arco de circunferencia de radio $L/2$ con centro en O.



Solución: a) De acuerdo al diagrama vectorial mostrado, podemos escribir para el vector $\overline{AB}$ a lo largo de la escalera:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = L\cos\phi\hat{x} - L\,\mathrm{sen}\,\phi\hat{y}$$

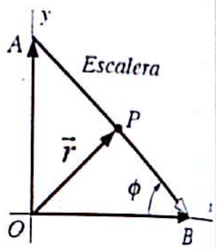
El vector posición del punto medio P es:

$$\vec{r} = \overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = L\,\mathrm{sen}\,\phi\hat{y} + \frac{L}{2}(\cos\phi\hat{x} - \mathrm{sen}\,\phi\hat{y})$$

$$\vec{r} = \frac{L}{2}(\cos\phi\hat{x} + \mathrm{sen}\,\phi\hat{y})$$

$$|\vec{r}| = \frac{L}{2}\sqrt{\cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi} = \frac{L}{2}$$

Es decir, cuando la escalera desliza por la pared, el punto medio P se mueve en una circunferencia de radio $L/2$.



Respuesta

a) Radio de la circunferencia: $|\vec{r}| = L/2$

PR-2.29. *Vectores y rotación de coordenadas*

Sean dos conjuntos de coordenadas rectangulares cartesianas en un plano: los ejes (x', y') están rotados por un ángulo θ relativo a los ejes (x, y). Si consideramos un punto P, el vector posición $\vec{r}$ (desplazamiento desde el origen O), es el mismo pero sus componentes según los ejes, son distintos. Demuestre la siguiente relación que existe entre estas coordenadas.

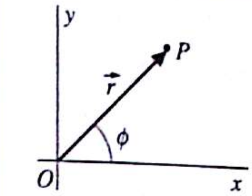
$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$$

Solución: En términos de los ángulos θ y ϕ podemos escribir las coordenadas en ambos sistemas:

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$x' = r\cos(\phi - \theta) \qquad y' = r\,\mathrm{sen}(\phi - \theta)$$

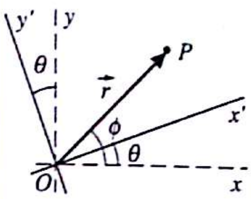


Usando la identidad trigonométrica,

$$\cos(\phi - \theta) = \cos\phi\cos\theta + \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$$

se obtiene la componente x':

$$x' = r\cos(\phi - \theta) = r\cos\phi\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$



Similarmente, usando la identidad trigonométrica,

$$\mathrm{sen}(\phi - \theta) = \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta - \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$$

se obtiene la componente y':

$$y' = r\,\mathrm{sen}(\phi - \theta) = r(\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta - \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Respuesta

$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$
$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$

PR-2.30. *Invariabilidad de operaciones vectoriales*

Cuando los ejes de coordenadas son rotados (o trasladados), una magnitud física representada por un vector no cambia, y se dice que es *invariante*. De la misma manera, las leyes físicas expresadas en ecuaciones vectoriales son independientes de la elección particular del sistema de coordenadas. Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ demuestre que, bajo una rotación de ejes a un ángulo θ, la suma $\vec{A} + \vec{B}$ es invariante.

Solución: a) Si escribimos cada vector en términos de sus coordenadas (x', y'):

$$\vec{A} = A\cos\alpha\hat{x}' + A\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{y}' \qquad \vec{B} = B\cos\beta\hat{x}' + B\,\mathrm{sen}\,\beta\hat{y}'$$

La suma en este sistema:

$$(\vec{A} + \vec{B})' = (A\cos\alpha + B\cos\beta)\hat{x}' + (A\,\mathrm{sen}\,\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\beta)\hat{y}'$$

De acuerdo al problema anterior, las relaciones entre los vectores unitarios en el sistema (x', y') y los del sistema (x, y) son:

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}sen\theta \qquad \hat{y}' = -\hat{x}sen\theta + \hat{y}\cos\theta$$

Sustituyendo estas expresiones, se obtiene:

$$(\vec{A}+\vec{B})' = (A\cos\alpha + B\cos\beta)(\hat{x}\cos\theta + \hat{y}sen\theta)$$
$$+(Asen\alpha + Bsen\beta)(-\hat{x}sen\theta + \hat{y}\cos\theta)$$

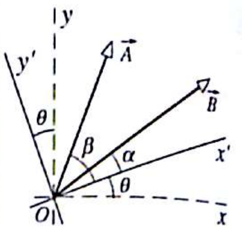
$$= \hat{x}[\cos\theta(A\cos\alpha + B\cos\beta) - sen\theta(Asen\alpha + Bsen\beta)]$$
$$+\hat{y}[sen\theta(A\cos\alpha + B\cos\beta) + \cos\theta(Asen\alpha + Bsen\beta)]$$

$$\hat{x}[A(\cos\theta\cos\alpha - sen\theta Asen\alpha) + B(\cos\theta\cos\beta - sen\theta sen\beta)]$$
$$+\hat{y}[A(sen\theta\cos\alpha + \cos\theta sen\alpha) + B(sen\theta\cos\beta + \cos\theta sen\beta)]$$

$$(\vec{A}+\vec{B})' = [A(\cos(\theta+\alpha) + B\cos(\theta+\beta)]\hat{x}$$
$$+[A(sen(\theta+\alpha) + B(\theta+\beta)]\hat{y}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})' = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} = (\vec{A}+\vec{B})$$

La invariabilidad de cualquier operación vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es consecuencia directa del hecho de que, bajo la rotación no cambia ni la magnitud de los dos vectores ni tampoco el ángulo entre ellos.



Respuesta

$$\boxed{(\vec{A}+\vec{B})' = (\vec{A}+\vec{B})}$$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-2.01. *El módulo de un vector......*

a) Depende del sistema de coordenadas.
b) Puede ser positivo o negativo.
c) Es cero si una de sus componentes es nula.
d) Puede ser menor que cualquiera de sus componentes.
e) Nada de lo anterior es correcto.

PE-2.02. *El módulo de la suma dos vectores.......*

a) $|\vec{A}+\vec{B}|$ es mayor que $|\vec{A}|$ o mayor que $|\vec{B}|$.
b) $|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$
c) $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$
d) $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}| - |\vec{B}|$
e) Puede resultar cualquiera de lo anterior.

PE-2.03. *Conclusión incorrecta*

¿Cuál de las siguientes conclusiones es *incorrecta*?

a) Si $\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{A}\bullet\vec{C}$, entonces: $\vec{B} = \vec{C}$
b) Si $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = 0$, entonces: $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{C} = \vec{C}\times\vec{A}$
c) Si $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$ entonces: $\vec{A}\times\vec{B} = 0$
d) Si $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = 0$, los tres vectores quedan en un plano.
e) Si $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$, entonces: $|\vec{C}\times\vec{A}| = |\vec{C}||\vec{A}|$

PE-2.04. *Un ángulo especial*

Dos vectores guardan las siguientes relaciones:

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| \quad y \quad |\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}|$$

Podemos concluir que el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

a) 30°, b) 60°, c) 90°, d) 120°, e) 180°

PE-2.05. *Una pregunta de pura lógica*

Un explorador sale de su tienda de campaña y realiza tres desplazamientos. Primero camina 5 km. en dirección hacia el sur, luego 5 km en dierección hacia el este y finalmente, 5 km en dirección hacia el norte. El explorador queda sorprendido porque ha llegado de nuevo a su tienda y allí encuentra un oso comiéndose su comida. La pregunta es: ¿de qué color es el oso?

a) Negro, b) Blanco, c) Gris, d) Marrón

PE-2.06. *Resultante de dos desplazamientos*

Cuando sumamos un desplazamiento de módulo 8 m con otro de módulo 5 m, el módulo del vector resultante podría ser:

a) 1 m. b) 2 m. c) 3,2 m. d) 13,5 m. e) 15 m.

PE-2.07. *Operaciones vectoriales no definidas*

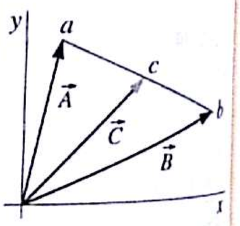
Entre las siguientes operaciones con vectores, ¿cuál es la única que está definida matemáticamente?

a) $\dfrac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\vec{C}}$, b) $\dfrac{\vec{A}}{\vec{B}\times\vec{C}}$ c) $\vec{A}\bullet(\vec{B}\bullet\vec{C})$,

d) $\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})$, e) $\vec{A}\times(\vec{B}\bullet\vec{C})$

PE-2.08. *Posición del punto medio de la recta*

En el esquema mostrado, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son los vectores posición de los puntos a y b. ¿Cuál sería el vector posición $\vec{C}$ para el punto medio de la recta $\overline{ab}$?



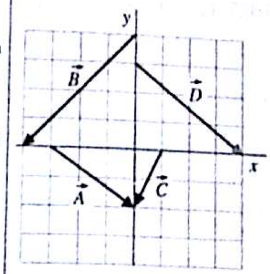
a) $\vec{C}=\dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$, b) $\vec{C}=\dfrac{\vec{A}}{2}+\vec{B}$, c) $\vec{C}=\vec{A}+\dfrac{\vec{B}}{2}$,

d) $\vec{C}=\dfrac{\vec{A}-\vec{B}}{2}$, e) $\vec{C}=\vec{A}-\dfrac{\vec{B}}{2}$

PE-2.09. *Ángulo entre vectores*

Si en el diagrama de vectores mostrado, efectuamos la operación:

$$\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$$

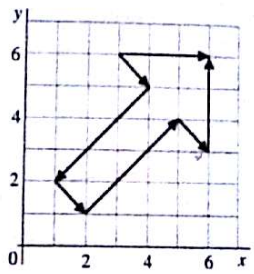


¿Cuál será el ángulo entre el vector resultante y el vector $\vec{D}$?

a) 90°. b) 53,1° c) 45° d) 36,9° e) 30°

PE-2.10. *¿ Cuál es el vector resultante ?*

En el esquema adjunto, ¿cuál es el vector resultante de la suma de estos vectores?



a) cero. b) $6\hat{x}$. c) $6\hat{y}$

d) $3\hat{x}+3\hat{y}$. e) $3\hat{x}-3\hat{y}$

PE-2.11. *Vectores paralelos*

De entre los cinco vectores siguientes, hay tres que son paralelos, ¿cuáles son?

$\vec{A}=2\hat{x}-1\hat{y}+4\hat{z}$

$\vec{B}=4\hat{x}-2\hat{y}+1z$

$\vec{C}=2\hat{x}+5\hat{y}-8\hat{z}$

$\vec{D}=-\hat{x}+0.5\hat{y}-2\hat{z}$

$\vec{E}=4\hat{x}-2\hat{y}+8\hat{z}$

a) $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ b) $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}$

d) $\vec{A}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ e) $\vec{A}$, $\vec{D}$ y $\vec{E}$

PE-2.12. *Vectores ortogonales*

Los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están expresados en términos de un parámetro λ. Para que estos vectores sean perpendiculares entre sí, el valor de λ debe ser:

$\vec{A}=\lambda\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z}$

$\vec{B}=2\lambda\hat{x}+\lambda\hat{y}-4z$

a) solo 1 b) solo -1 c) solo 2 d) -1 ó 2 e) -2 ó 2

PE-2.13. *Vector posición y vector velocidad*

Si $\bar{r}$ es el vector posición de una partícula, y $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ es su vector velocidad, entonces para el producto escalar se cumple:

a) $\bar{v} \bullet \bar{r} = r(\frac{dr}{dt})$ b) $\bar{v} \bullet \bar{r} = \frac{d^2r}{dt}$ c) $\bar{v} \bullet \bar{r} = \frac{1}{r}(\frac{d}{dt}r^2)$

d) $\bar{v} \bullet \bar{r} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}r^2)$ e) Ninguna de las anteriores

PE-2.14. *Producto vectorial igual a producto escalar*

Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son vectores no nulos tales que $|\bar{A} \times \bar{B}| = \bar{A} \bullet \bar{B}$ entonces el ángulo entre $\bar{A}$ y $\bar{B}$ es:

a) 0° b) 30° c) 45° d) 90°

e) Ningún ángulo posible

$|\bar{A} \times \bar{B}| = \bar{A} \bullet \bar{B}$

PE-2.15. *Cuadrados de productos vectorial y escalar*

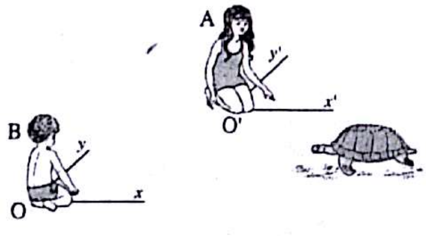
¿Cuál es el valor de la expresión: $(\bar{A} \times \bar{B})^2 + (\bar{A} \bullet \bar{B})^2$?

a) $\frac{1}{2}A^2B^2$ b) A^2B^2 c) $2A^2B^2$

d) $\frac{1}{4}A^2B^2$ e) $4A^2B^2$

PE-2.16. *Dos observadores, dos vectores de posición*

La posición de una tortuga en la playa es determinada por dos observadores en un cierto instante:



Tomando ejes de coordenadas paralelos, sus mediciones dan:

A: $\bar{r}_A = (4\hat{x} + 3\hat{y})$ m

B: $\bar{r}_B = (\hat{x} - \hat{y})$ m

¿Cuál es la distancia entre los dos observadores?

a) 1 m.
b) 2 m
c) 3 m
d) 4 m
e) 5 m

PE-2.17. *Ángulo entre vectores*

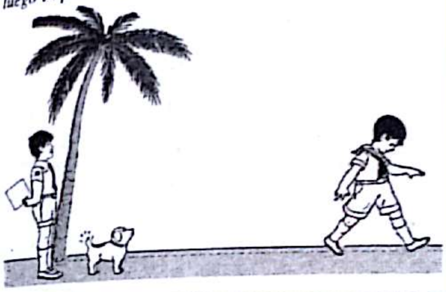
Considerando dos vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$, ¿Cuál será el ángulo entre los vectores?:

$(B\bar{A} + A\bar{B})$ y $(B\bar{A} - A\bar{B})$

a) 0°. b) 45°. c) 90°. d) 135°. e) 180°

PE-2.18. *¿A cuántos pasos se encuentra el tesoro?*

Unos niños exploradores siguen las siguientes instrucciones para ubicar un supuesto tesoro: *A partir de la mata de coco, dé 14 pasos en la dirección Nor-Este, luego 14 pasos hacia el Sur y finalmente, 7 pasos al Este.*



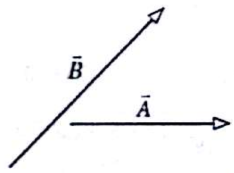
¿Cuántos pasos aproximadamente, hay directamente desde la mata de coco hasta el lugar donde está el tesoro enterrado?

a) 5 pasos
b) 8 pasos.
c) 11 pasos
d) 14 pasos
e) 21 pasos

PE-2.19. *Vector $(\bar{A} - \bar{B})$ perpendicular al vector $\bar{A}$*

Un vector $\bar{A}$ tiene módulo 3 y forma un ángulo de 45° con un vector $\bar{B}$. ¿Cuál debe ser el módulo del vector $\bar{B}$ para que el vector $(\bar{A} - \bar{B})$ sea perpendicular a $\bar{A}$?

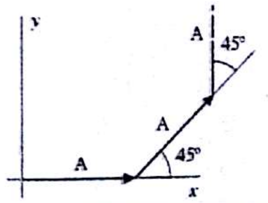
a) $\sqrt{18}$, b) 4, c) $\sqrt{12}$, d) 5, e) $\sqrt{21}$



PE-2.20. *Cinco vectores con igual módulo y a 45°*

Considere cinco vectores de módulo A. Partiendo del origen de coordenadas se colocan a intervalos de 45° desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 180°$. El módulo del vector suma es:

a) $\sqrt{2}A$, b) $2\sqrt{2}$, c) $(1+\sqrt{2})A$, d) $(1+2\sqrt{2})A$



PE-2.21. ***Relaciones de productos de vectores***

¿Cuál de las siguientes relaciones entre productos de vectores *no* es correcta?

a) $\bar{A} \bullet \bar{B} \times \bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} \bullet \bar{C}$

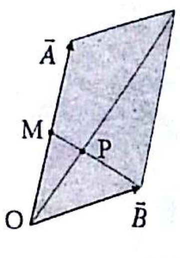
b) $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$

c) $(\bar{A} + \bar{B}) \bullet (\bar{A} - \bar{B}) = A^2 - B^2$

d) $(\bar{A} + \bar{B}) \times (\bar{A} - \bar{B}) = 2\bar{B} \times \bar{A}$

PE-2.22. ***Formando un paralelogramo con dos vectores***

Sean dos vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ con el mismo origen O y en lados adyacentes de un paralelogramo. Si M es el punto medio del lado de $\bar{A}$, ¿cuál es el vector desplazamiento $\overline{OP}$, expresado en términos de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$?



a) $\overline{OP} = \frac{1}{2}\bar{A} + \frac{1}{2}\bar{B}$.

b) $\overline{OP} = \frac{1}{2}\bar{A} + \frac{1}{3}\bar{B}$.

c) $\overline{OP} = \frac{1}{3}\bar{A} + \frac{1}{2}\bar{B}$.

d) $\overline{OP} = \frac{1}{3}\bar{A} + \frac{1}{3}\bar{B}$.

CAP. 2: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
2.01					✓
2.03	✓				
2.05		✓			
2.07				✓	
2.09		✓			
2.11					✓
2.13				✓	
2.15		✓			
2.17			✓		
2.19	✓				
2.21		✓			

	a	b	c	d	e
2.02					✓
2.04				✓	
2.06			✓		
2.08	✓				
2.10		✓			
2.12				✓	
2.14			✓		
2.16					✓
2.18	✓				
2.20			✓		
2.22				✓	

3

CINEMÁTICA RECTILÍNEA

La mecánica es la rama de la física dedicada al estudio del movimiento de los cuerpos; de lo que lo produce y de lo que lo afecta. Usualmente se separa este estudio en dos áreas: La cinemática y la dinámica. La cinemática se ocupa de la geometría del movimiento, es decir, la descripción matemática de *cómo* se mueven los objetos sin prestar atención al motivo por el cual ocurre de una forma determinada. La dinámica permite aclarar la cuestión de *por qué* el movimiento transcurre de este y no de otro modo (su relación con las interacciones). Un objeto puede moverse básicamente de dos modos diferentes: por *traslación* (cambio de localización) o por *rotación* (cambio de orientación), o por una combinación de ambos. En esta unidad estudiaremos únicamente la cinemática de traslación. En un cuerpo rígido que se traslada, todas sus partes experimentan el mismo cambio de posición y se mueven con la misma trayectoria. De modo que, podemos tomar un punto representativo en el cuerpo para describir su movimiento de traslación. Es en este sentido, que el objeto puede ser considerado como una partícula. Comenzaremos en este capítulo con el estudio del movimiento en su versión mas simple, es decir, el que transcurre a largo de una línea recta o en una dimensión del espacio. Se introducen algunas definiciones y conceptos básicos tales como posición, desplazamiento, velocidad y aceleración, y se establecen las relaciones matemáticas entre estas magnitudes físicas y el tiempo del movimiento.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Vector posición y vector desplazamiento
- Rapidez media
- Velocidad media y velocidad instantánea
- Aceleración media y aceleración instantánea
- Movimiento unidimensional con aceleración constante
- Cuerpos en caída libre.

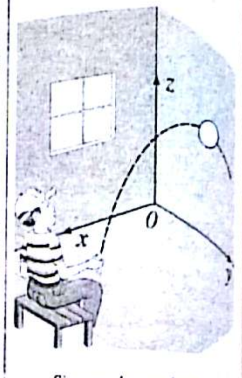
MARCOS DE REFERENCIA Y SISTEMAS DE COORDENADAS

Para que un observador pueda ubicar un objeto en el espacio, necesita un *marco de referencia*. Es decir, debe seleccionar:

- Un objeto de referencia (el origen O)
- Direcciones especificas (o conjunto de ejes x, y, z)

En un mismo marco de referencia pueden emplearse diferentes *sistemas de coordenadas*, es decir, diferentes maneras de especificar la ubicación de los puntos del objeto en relación al origen y a los ejes.

El sistema que mas frecuentemente utilizaremos para la descripción del movimiento es el sistema de *coordenadas cartesianas*. Los otros dos sistemas de coordenadas importantes en tres dimensiones son el cilíndrico y el esférico.



Sistema de coordenadas cartesianas

VECTOR DE POSICIÓN

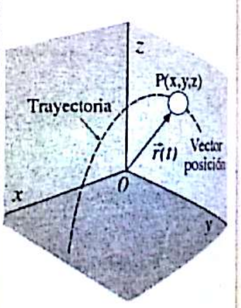
Si escogemos un punto $P(x,y,z)$ para representar un objeto, su ubicación en cualquier momento está especificada por *el vector de posición* $\vec{r}(t)$ en un determinado marco de referencia:

La función $\vec{r}(t)$ contiene toda la información acerca del movimiento. Permite conocer dónde se encontraba el objeto en cualquier tiempo pasado y predecir dónde se encontrará en cualquier tiempo futuro.

Se puede expresar el vector de posición $\vec{r}(t)$ en términos de las tres componentes escalares que son funciones del tiempo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Siendo $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ los vectores unitarios a lo largo de las tres direcciones ortogonales.



Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son descripciones independientes del movimiento a lo largo de cada una de las coordenadas cartesianas. Estas funciones dependen de una variable común, el tiempo t y se denominan *ecuaciones paramétricas del movimiento*. La variable común, el tiempo, se denomina parámetro.

Ecuaciones paramétricas del movimiento

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$

TRAYECTORIA

La operación algebraica de eliminar el parámetro tiempo de las ecuaciones paramétricas del movimiento: $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ produce una ecuación que expresa la relación explícita entre las coordenadas cartesianas en cualquier momento.

Trayectoria en un plano

$y = f(x)$

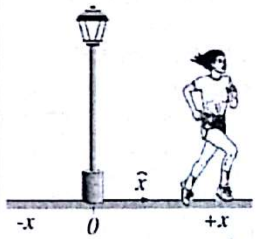
Se denomina *trayectoria* el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va ocupando el móvil en el espacio. Si los puntos que va ocupando el móvil en sucesivos instantes quedan en una línea curva, la trayectoria se llama curvilínea. Si los puntos quedan en una línea recta, la trayectoria es *rectilínea*. En este capítulo nos abocaremos al estudio del movimiento rectilíneo.

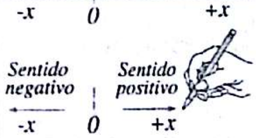
POSICIÓN EN EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Cuando el objeto se mueve en una trayectoria rectilínea, conviene elegir el marco de referencia de modo que uno de sus ejes (por ejemplo, el eje x) coincida con la dirección del movimiento. De esta manera el vector de posición $\vec{r}(t)$ tiene solo una componente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x}$$

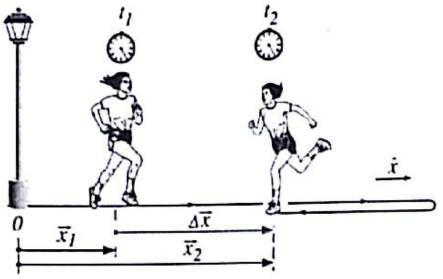
Cuando analizamos un movimiento rectilíneo se podría suprimir el vector unitario $\hat{x}$ del vector de posición y trabajar únicamente con su componente escalar $x(t)$. Lo mismo sucede con otras magnitudes vectoriales, como desplazamiento, velocidad y aceleración. En este caso, queda entendido que un valor positivo para dicha magnitud física, significa que el correspondiente vector apunta en el sentido del *eje positivo* que se ha elegido, mientras que un valor negativo, significa que el vector apunta en el sentido del *eje negativo*.





DESPLAZAMIENTO

Si $\vec{x}_1$ es la posición en el instante t_1 y $\vec{x}_2$ es su posición en el instante t_2, el vector desplazamiento es el cambio en el vector de posición en ese intervalo de tiempo.



Desplazamiento:
Cambio de posición

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i}$$

Observe la diferencia entre *distancia recorrida* y *desplazamiento*. Si una persona recorre 20 m en línea recta hacia la derecha y luego se devuelve 12 m hacia la izquierda, la distancia total recorrida en ese intervalo de tiempo total es: D = 20 m + 12m = 32 m, pero su desplazamiento $\Delta\vec{x}$ fue tan solo de 8 m hacia la derecha.

Distancia recorrida (escalar)
Longitud de la trayectoria

Desplazamiento (vector)
Qué tan lejos y en qué dirección

RAPIDEZ MEDIA

La *rapidez media* durante un intervalo de tiempo es el cociente entre la distancia D recorrida y el intervalo de tiempo Δt. La rapidez media es un escalar positivo.

$$\text{Rapidez media} = \frac{\text{Distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{D}{\Delta t}$$

VELOCIDAD MEDIA

La velocidad media de un objeto se define como la razón del desplazamiento y el intervalo de tiempo transcurrido.

La velocidad media describe el comportamiento global del movimiento durante cierto intervalo pero no es útil para describir los detalles en cada instante.

$$\vec{v}_m = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Tiempo}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

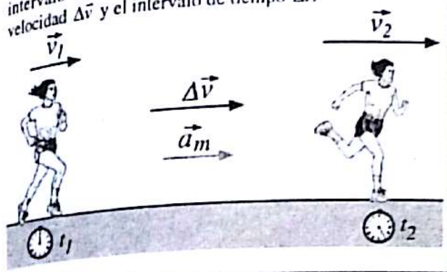
La velocidad instantánea $\vec{v}$ en cualquier momento, se define como la velocidad media en un intervalo infinitamente corto. Estrictamente, $\vec{v}$ es el límite de la razón $(\Delta\vec{x}/\Delta t)$ cuando Δt tiende a cero, por definición, es la derivada de la posición x con respecto al tiempo.

Velocidad instantánea

$$\vec{v} = Lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración media de un objeto durante un cierto intervalo de tiempo, es la razón del cambio de su velocidad $\Delta\vec{v}$ y el intervalo de tiempo Δt.



Aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

La aceleración instantánea, $\vec{a}$, es el límite al cual tiende la razón $(\Delta\vec{v}/\Delta t)$ cuando el intervalo de tiempo, Δt, tiende a cero. Por definición, es igual a la derivada de la velocidad $\vec{v}$ con respecto al tiempo y es también la segunda derivada de la posición $\vec{x}$ con respecto al tiempo.

La existencia de este límite se basa en que el movimiento físico es un proceso continuo en el cual ni la posición ni la velocidad pueden "saltar" de un valor a otro sin pasar por valores intermedios. Es decir, la función $x(t)$ debe ser derivable dos veces. Por otra parte, la aceleración sí puede variar súbitamente sin pasar por valores intermedios (no hay restricciones de continuidad para la aceleración).

Aceleración instantánea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

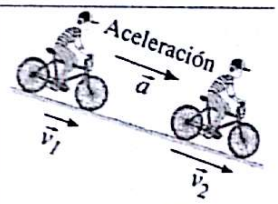
$\frac{d}{dt}(v) = a$

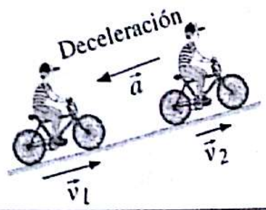
ACELERACIÓN Y DECELERACIÓN

Cuando la aceleración tiene el mismo sentido que la velocidad, significa que el valor absoluto de ésta va en aumento y el movimiento se dice que es *acelerado*.

Si en cambio, la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos, significa que el valor absoluto de la velocidad disminuye y se dice que el movimiento es retardado o *decelerado*.

Observe que para tener un movimiento acelerado o decelerado, lo que importa no es el signo de la aceleración aisladamente, sino que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{v}$ tengan signos iguales (aceleración), u opuestos (deceleración)





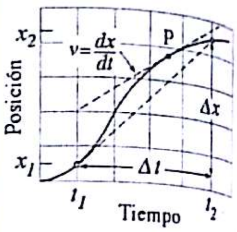
ANÁLISIS GRÁFICO DEL MOVIMIENTO

Una manera simple de presentar información sobre el movimiento es mediante un gráfico de la posición x del móvil en función del tiempo t. En este gráfico el valor de la *velocidad media* es igual a la pendiente del segmento de recta que conecta los puntos inicial y final:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{Pendiente}$$

En un instante dado (punto P), el valor de la *velocidad instantánea* es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en ese punto:

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{Pendiente de la tangente}$$



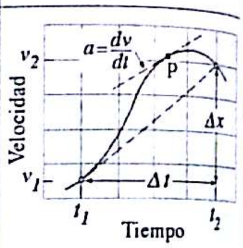
Velocidad media y Velocidad instantánea

En un gráfico de velocidad en función del tiempo, v vs t, la pendiente de la línea que une dos puntos es la aceleración media:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{Pendiente}$$

La aceleración instantánea en un tiempo t es la pendiente de la tangente a la curva en ese instante (Punto P).

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{Pendiente de la tangente}$$



Aceleración media y Aceleración instantánea

ÁREA BAJO LA CURVA DE VELOCIDAD

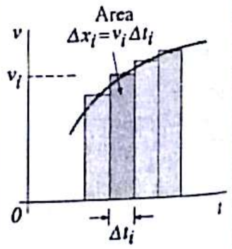
El gráfico de v vs. t puede ser usado para determinar el desplazamiento en un dado intervalo de tiempo. Si se divide este intervalo en un número de pequeños intervalos Δt_i y si $\bar{v}_i$ es la velocidad media durante el intervalo centrado en t_i, el desplazamiento elemental es:

$$\Delta x_i = \bar{v}_i \Delta t_i = \text{área rectangular sombreada}$$

La suma de todos estos intervalos es el desplazamiento neto en el intervalo entre t_1 y t_2 es:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \sum_i \bar{v}_i \Delta t_i = \text{área bajo la curva}$$

En el límite cuando $\Delta t_i \to 0$ y el número de intervalos se hace muy grande, la suma tenderá a un valor numérico igual al área bajo la curva.



El desplazamiento es igual al área bajo la curva

ACELERACIÓN CONSTANTE

Cuando la aceleración es constante, sus valores instantáneos coinciden con su valor medio, y podemos escribir:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

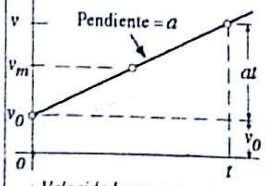
Por lo tanto:

$$v = v_0 + at \qquad (1)$$

Donde v_0 es la velocidad inicial en $t = 0$ y v la velocidad para un tiempo t posterior. Vemos que para a constante, la velocidad crece (o decrece) linealmente con el tiempo. En el gráfico de v vs. t esta ecuación representa una línea recta de pendiente a.

También se observa en el gráfico que, para a constante la velocidad media es el valor medio de las velocidades inicial y final:

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} \qquad (2)$$



Velocidad para a constante

$v = v_0 + at$

Velocidad media para a constante

$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$

El desplazamiento entre 0 y t es igual al área bajo la curva v vs t entre esos dos instantes, o sea, la suma del área del triángulo (A_1) y el área del rectángulo (A_2):

$$\Delta x = x - x_0 = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(t)(at) + (t)v_0$$

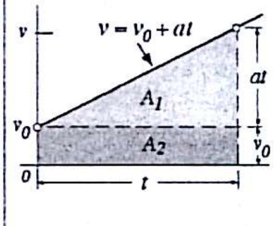
Por lo tanto la posición en función del tiempo es:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3)$$

Podemos combinar esta ecuación para la posición con la ecuación para la velocidad ($v = v_0 + at$), para eliminar el tiempo t y así relacionar directamente la posición con la velocidad:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (4)$$

De modo que disponemos de un conjunto de ecuaciones que relacionan las tres variables (x, t, v), para resolver problemas de movimiento unidimensional con a constante y dadas las condiciones iniciales (x_0 y v_0).



Ecuaciones cinemáticas para aceleración constante

Velocidad media
$\frac{v_0 + v}{2} = \frac{x - x_0}{t}$

Velocidad en función del tiempo
$v = v_0 + at$

Posición en función del tiempo
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Velocidad en función de posición
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN VARIABLE

Hemos visto el problema directo de cómo hallar por *derivación*, y a partir de la función posición, $x(t)$, la velocidad, $v(t)$ y la aceleración, $a(t)$. El proceso inverso también es posible y consiste en hallar por *integración*, la posición, dada la velocidad o la aceleración.

Supongamos que se conoce aceleración como una función del tiempo, $a(t)$. Para obtener la velocidad, partimos de la definición de la aceleración:

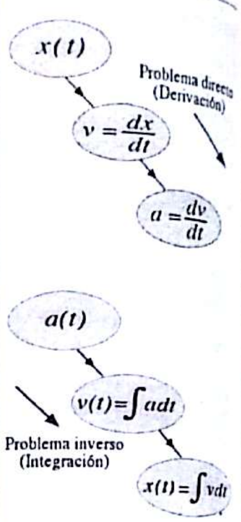
$$a(t)=\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v(t)=\int a(t)dt+c_1$$

Luego, a partir de la velocidad hallamos la posición:

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad x(t)=\int v(t)dt+c_2$$

En donde las constantes c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones iniciales.

La técnica de integración nos permite obtener las ecuaciones de cinemática rectilínea, cuando la aceleración es una función conocida del tiempo y se si conocen la posición y la velocidad en el instante inicial.



La aceleración y las condiciones iniciales determinan el movimiento

CAÍDA LIBRE

Una de las aplicaciones más interesantes de las ecuaciones para el movimiento rectilíneo con aceleración uniforme, es el caso de un objeto que cae libremente en el campo gravitacional de la Tierra. Al estudiar la caída de los cuerpos mediante experimentos, el sabio Galileo Galilei llegó a la conclusión de que:

" En cualquier lugar vecino a la superficie terrestre y en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma aceleración ".

La aceleración de la gravedad, cerca de la superficie de la Tierra tiene un valor aproximado:

$$g = 9{,}80 \text{ m/s}^2$$

Hay que tomar en cuenta que la gravedad siempre apunta hacia abajo (hacia el centro de la tierra), y por lo tanto el signo de la aceleración ($a = \pm g$) dependerá de cuál de los dos sentidos (hacia arriba o hacia abajo) se haya elegido como positivo en el sistema de coordenadas utilizado.

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-3.01. ***Velocidad media en el metro de Caracas***

En el diagrama se indican las distancias entre varias estaciones consecutivas de la línea 1 del Metro de Caracas; así como los tiempos típicos de recorrido:

a) Determine la velocidad media en cada tramo y la media aritmética de estas velocidades.
b) Suponiendo que el vagón viaja sin detenerse en ninguna de las estaciones intermedias, halle la velocidad media desde la estación Capitolio a Plaza Venezuela.

Solución: a) En cada caso la velocidad media es el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado:

Capitolio / Hoyada:	v_m = 745m/1,20min = 37,3km/h
Hoyada / P.Carabobo:	v_m = 581m/0,95min = 36,7km/h
P. Carabobo / B. Artes:	v_m = 513m/0,83min = 37,1km/h
B. Artes/C. Ingenieros	v_m = 974m/1,23min = 47,5km/h
C. Ingenieros/Pza.Ven:	v_m =1315m/1,50min = 52,6km/h

El promedio aritmético de estas velocidades medias es:

$$\langle v \rangle = \frac{37{,}3+36{,}7+37{,}1+47{,}5+52{,}6}{5} = 42{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) La distancia total recorrida es:

$$d = 745 + 581 + 513 + 974 + 1315 = 4128 \text{ m} = 4{,}128 \text{ km}$$

Si el vagón no se detiene en ninguna de las estaciones, el tiempo total empleado para recorrer esa distancia es:

$$t = 1{,}20 + 0{,}95 + 0{,}83 + 1{,}23 + 1{,}50 = 5{,}71\text{min} = 0{,}0952\text{h}$$

Por lo tanto, la velocidad media global durante todo el recorrido es:

$$\bar{v} = \frac{4{,}128\text{km}}{0{,}0815\text{h}} = 43{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Respuesta:

a) Media aritmética = $42{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) Velocidad media: v_m=$43{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

PR-3.02. *Velocidad media y rapidez media*

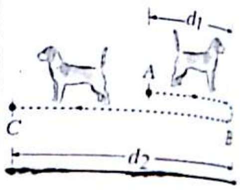
Un perro camina hacia un hueso durante 20 s en línea recta a la velocidad de 2 m/s. Toma el hueso y se devuelve caminando una distancia de 100 m a 1 m/s.

a) ¿Cuál es su rapidez media?

b) ¿Cuál es su velocidad media?

Solución: a) En el trayecto de ida, el perro camina durante un tiempo: $\Delta t_1 = 20$ s y recorre una distancia:

$$d_1 = v_1 \Delta t_1 = (2\text{m/s})(20\text{s}) = 40\text{m}$$



Distancia recorrida:
$D = d_1 + d_2$

En el trayecto de vuelta camina una distancia: $d_2 = 100$ m, en un tiempo:

$$\Delta t_1 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{100\text{m}}{1\text{m/s}} = 100\text{s}$$

La distancia total recorrida es:

$$D = d_1 + d_2 = 40 \text{ m} + 100 \text{ m} = 140 \text{ m}$$

El intervalo de tiempo total es:

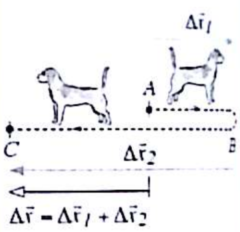
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 20 \text{ s} + 100 \text{ s} = 120 \text{ s}$$

La rapidez media es la distancia total recorrida dividida por el intervalo de tiempo empleado:

$$\text{Rapidez media} = \frac{D}{\Delta t} = \frac{140\text{m}}{120\text{s}} = 1{,}17\text{m/s}$$

b) Tomemos el origen en el punto A de partida y el eje x, con sentido positivo hacia la derecha. El desplazamiento neto del perro es:

$$\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}_1 + \Delta\vec{x}_2 = 40\hat{x}\text{m} - 100\hat{x}\text{m} = -60\hat{x}\text{m}$$



Desplazamiento neto

La velocidad media es el desplazamiento neto dividido por el intervalo de tiempo empleado:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{-60\hat{x}\text{m}}{120\text{s}} = -0{,}5\hat{x}\text{m/s}$$

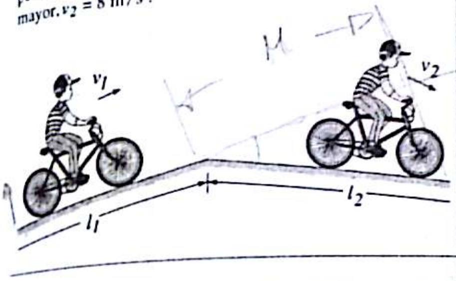
El vector velocidad media tiene sentido hacia la izquierda. Observe que el módulo de la velocidad media es en este caso diferente a la rapidez media. Esto se debe a que los desplazamientos se suman vectorialmente.

Respuesta:

Rapidez media:	1,17m/s
Velocidad media:	−0,5 x̂m/s

PR-3.03. *Rapidez media para tiempos iguales y para distancias iguales*

Un ciclista marcha por una pendiente cuesta arriba con una rapidez constante, $v_1 = 4$ m/s y luego por otra pendiente cuesta abajo con una rapidez constante mayor, $v_2 = 8$ m/s.



Calcule la rapidez media en los siguientes dos casos:

a) El ciclista emplea el *mismo tiempo* en la subida que en la bajada.

b) La subida y la bajada tienen la *misma longitud*.

Solución: a) La rapidez media es el cociente entre la longitud total recorrida L y el intervalo de tiempo total T:

$$v_m = \frac{L}{T} = \frac{l_1 + l_2}{T} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{T}$$

Los dos tiempos parciales son iguales, $t_1 = t_2 = T/2$. Por lo tanto, se simplifican los tiempos:

$$v_m = \frac{v_1(T/2) + v_2(T/2)}{T} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{4\text{m/s} + 8\text{m/s}}{2} = 6\text{m/s}$$

b) En este caso las longitudes son iguales, $l_1 = l_2 = L/2$:

$$v_m = \frac{L}{T} = \frac{L}{t_1 + t_2} = \frac{L}{\left(\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}\right)} = \frac{L}{\frac{1}{2}\left(\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}\right)}$$

$$v_m = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$v_m = 2\frac{(4\text{m/s})(8\text{m/s})}{(4\text{m/s} + 8\text{m/s})} = 5{,}33\text{m/s}$$

Se observa que la rapidez media coincide con la media aritmética de las rapideces, solo en el caso (a) en que los tiempos de recorrido sean iguales.

Respuesta:

a) $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = 6\text{m/s}$

b) $v_m = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 5{,}33\text{m/s}$

PR-3.04. *Fábula de Esopo: La liebre y la tortuga.*

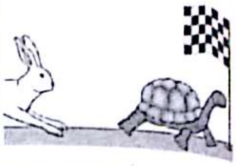
En el bosque vivía doña liebre que siempre se reía de doña tortuga por su lentitud. Un día la liebre retó a la tortuga a una carrera por un camino de 2,4 km, dándole media hora de ventaja. Se dá la partida y la tortuga va caminando a 0,25 m/s. Al cabo de 30 min, la liebre arranca a andar a 2 m/s y muy pronto alcanza a la tortuga, pasando por su lado en forma burlona. Después de andar quince minutos, la liebre decidió que tenía tiempo para tomar una siesta y se echó a dormir bajo un árbol.

Pero la liebre se quedó dormida durante 111 minutos y cuando se despertó, corrió con todas sus fuerzas; pero ya era muy tarde, la tortuga estaba llegando a la meta.

a) ¿Con qué ventaja gana doña tortuga?

b) ¿En qué instante de tiempo, la liebre adelanta a la tortuga.

c) ¿En qué instante posterior la tortuga adelanta a la liebre?



Solución: a) El tiempo que tarda la tortuga en llegar a la meta es:

$$t_T = \frac{d}{v_T} = \frac{2400\text{m}}{0{,}25\text{m/s}} = 9600\text{s}\left(\frac{1}{60\text{s/min}}\right) = 160\text{min}$$

Durante ese tiempo la liebre habrá recorrido las distancias parciales:

$0 < t < 30$ min (reposo): $\Delta x_1 = 0$

$30 < t < 45$ min: $\Delta x_2 = (2\frac{m}{s})(15\text{min})(60\frac{s}{min}) = 1800\text{m}$

45 min $< t < 156$ min (reposo): $\Delta x_3 = 0$

156min$<t<$160 min: $\Delta x_4 = (2\frac{m}{s})(4\text{min})(60\frac{s}{min}) = 480\text{m}$

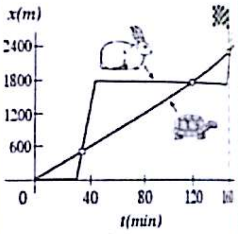
La distancia total recorrida por la liebres es:

$$\Delta x_l = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 1800\text{m} + 480\text{ m} = 2280\text{ m}$$

Es decir, cuando la tortuga llega a la meta, todavía a la liebre le falta recorrer 120 m.

b) El instante en que la liebre pasa a la tortuga se obtiene igualando sus posiciones: $x_T = v_T t$ y $x_L = v_L(t - 1800)$, y se obtiene:

$$t = \left(\frac{v_L}{v_L - v_T}\right)1800\text{s} = \left(\frac{2{,}00}{2{,}00 - 0{,}25}\right)1800\text{s} = 206\text{s} = 34{,}3\text{min}$$



b) El instante en que la tortuga pasa junto a la liebre dormida es:

$$t = \frac{x_L}{v_T} = \frac{1800\text{m}}{0{,}25\text{m/s}} = 7200\text{s}\left(\frac{1}{60\text{s/min}}\right) = 120\text{min}$$

Moraleja de este cuento: *La pereza y el exceso de confianza puede hacer que no alcancemos nuestros objetivos. Con dedicación, constancia y paciencia, aunque seamos lentos, obtendremos el éxito.*

Respuesta:

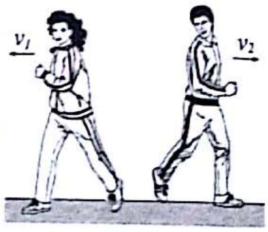
a) La tortuga gana con una ventaja de 120 m.
b) La libre pasa a la tortuga en $t = 34{,}3$ min.
c) La tortuga pasa a la liebre en $t = 120$ min.

PR-3.05. *Dos encuentros en el gimnasio*

En el gimnasio de la universidad, dos estudiantes trotan en línea recta desde un extremo a otro y regresan. Los estudiantes parten simultáneamente de los lados opuestos, A y B y en el trayecto de ida se cruzan a 60 m de A. En el trayecto de vuelta se cruzan a 80 m de B.

a) ¿Cuál es la longitud AB del gimnasio?

b) ¿Cuál es la relación de las velocidades?



Solución: a) Si parten simultáneamente de los extremos del gimnasio, el primer encuentro ocurre en el instante:

$$t_a = \frac{60}{v_1} = \frac{\overline{AB} - 60}{v_2} \qquad (1)$$

Mientras que el segundo encuentro ocurre en el instante:

$$t_b = \frac{\overline{AB} + 80}{v_1} = \frac{2\overline{AB} - 80}{v_2} \qquad (2)$$

Combinando las expresiones (1) y (2):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\overline{AB} - 60}{60} = \frac{2AB - 80}{\overline{AB} + 80}$$

$$(\overline{AB} - 60)(\overline{AB} + 80) = 60(2AB - 80) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 100\text{m}$$

b) La relación entre sus velocidades es:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\overline{AB} - 60}{60} = \frac{100 - 60}{60} = \frac{2}{3}$$

Respuesta

a) $\overline{AB} = 100\text{m}$
b) $\frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3}$

PR-3.06. *¡Sorpresa!*

Una persona enciende la luz de la cocina y sorprende a un ratón cerca de un pedazo de queso. Cunde el pánico y a partir de ese instante, la posición x del ratón en función del tiempo sigue la relación:

$$x(t) = (3t^2 - 2t^3)\ \text{m}$$

Determine:

a) La velocidad del ratón en el instante $t = 0{,}3$ s

c) La máxima velocidad del ratón mientras avanzaba hacia el queso.

b) El instante de tiempo en que el ratón comienza a devolverse y la máxima posición que alcanza.

d) La longitud total que habrá recorrido el ratón al cabo de 2 s.

Solución: a) La velocidad instantánea es la derivada de la posición $x(t)$ respecto al tiempo. En el instante $t = 0{,}3$ s, se obtiene:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2t^3) = 6t(1-t) = +1{,}26\ \text{m/s}$$

El signo (+) de la velocidad significa que apunta hacia la derecha, es decir, el ratón va hacia el queso.

b) El valor máximo de la velocidad mientras el ratón avanza hacia el queso, ocurre en el instante dado por la condición:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t - 6t^2) = 6 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6/12 = 0{,}5\ \text{s}$$

El valor de v en ese instante es:

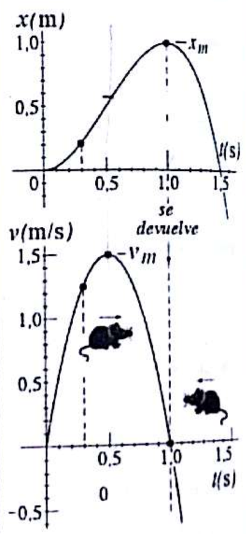
$$v_m = 6(0{,}5) - 6(0{,}5^2) = 1{,}5\ \text{m/s}$$

c) En la posición máxima, el ratón tendrá que detenerse instantáneamente antes de devolverse. Por lo tanto, allí se cumple que $v = 0$:

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t - 6t^2 = 6t(1-t) = 0$$

Esta ecuación se satisface para $t = 0$ (valor inicial de la velocidad) y para $t = 1$s que corresponde a la máxima posición buscada:

$$x_m = 3(1\text{s})^2 - 2(1\text{s})^3 = 1\text{m}$$



d) Para hallar la distancia total recorrida sumamos los módulos de los desplazamientos en los diferentes intervalos:

Desde $t = 0$ s hasta $t = 1$ s: $|\Delta x| = |x(1{,}0) - x(0)| = 1$ m

Desde $t = 1$ s hasta $t = 1{,}5$ s: $|\Delta x| = |x(1{,}5) - x(1{,}0)| = 1$ m

Desde $t = 1{,}5$ s hasta $t = 2$ s: $|\Delta x| = |x(2{,}0) - x(1{,}5)| = 4$ m

La distancia total recorrida al cabo de 2 s es:

$$D = 1\text{m} + 1\text{m} + 4\text{m} = 6\text{m}$$

Respuesta:

a) $v = 1{,}2$ m/s en $t = 0{,}3$s
b) $v_m = 1{,}5$ m/s
c) $x_m = 1$ m en $t = 1{,}0$s
d) $D = 6$ m

PR-3.07. *Minimizando el tiempo de viaje*

Un tren realiza el recorrido entre dos estaciones, acelerando primero con aceleración uniforme a_1, luego se desplaza con velocidad constante v, y finalmente frena con deceleración uniforme a_2, hasta detenerse. Demuestre que el menor tiempo de viaje se consigue acelerando y luego frenando, sin dar el paso intermedio de velocidad constante.

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$V = a \cdot t$

Momentos independientes

Solución: Las distancias recorridas en las tres distintos intervalos de tiempo, t_1, t_0 y t_2 son, respectivamente:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 \qquad x_0 = vt_0 = (a_1t_1)t_0$$

$$x_2 = vt_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 = (a_1t_1)t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

$-V_0 = V + a t$

$V_0 = V - a t$

La distancia total es:

$$d = x_1 + x_0 + x_2 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + a_1t_1t_0 + a_1t_1t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

Tomando en cuenta que, $v = a_1t_1 = a_2t_2$, se obtiene:

$$d = \frac{1}{2}a_1t_1(t_1 + 2t_0 + t_2) = \frac{1}{2}a_1t_1(T + t_0)$$

Siendo el tiempo total: $T = t_1 + t_0 + t_2$. Despejando t_1:

$$t_1 = T - t_0 - t_2 = T - t_0 - \frac{a_1}{a_2}t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}(T - t_0)$$

$$d = x_1 + x_2 = v_0 t_r + v_0 t_f - \frac{1}{2} a t_f^2 \qquad (1)$$

Por otra parte, la velocidad final es cero, por tanto:

$$v = v_0 - a t_f \quad \Rightarrow \quad t_f = v_0 / a$$

Reemplazando el tiempo de frenado en la ecuación (1), se obtiene:

$$d = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = v_0 t_r + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} \qquad (2)$$

Podemos aplicar esta relación para las dos situaciones planteadas, que corresponden a velocidades iniciales diferentes:

$$d_A = v_{0A} t_r + \frac{v_{0A}^2}{2a} \qquad d_B = v_{0B} t_r + \frac{v_{0B}^2}{2a}$$

Las incógnitas a y t_r se obtienen, resolviendo este par de ecuaciones simultáneas. Si multiplicamos la primera ecuación por v_{0B} y la segunda por $v = v_{0A}$ y luego se resta una de la otra, se obtiene la deceleración del automóvil:

$$a = \frac{v_{0A}^2 v_{0B} - v_{0B}^2 v_{0A}}{2(v_{0B} d_A - v_{0A} d_B)} = \frac{25^2(15) - 15^2(25)}{2[15(60) - 25(25)]} = 6{,}82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Al sustituir a de vuelta en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se obtiene el tiempo de reacción, t_r:

$$t_r = \frac{v_{0A}^2 d_B - v_{0B}^2 d_A}{v_{0A}^2 v_{0B} - v_{0A} v_{0B}^2} = \frac{25^2(25) - 15^2(60)}{(25^2)(15) - (25)(15^2)} = 0{,}567\text{s}$$

Respuesta

a) $a = -6{,}82$ m/s²
b) $t_r = 0{,}567$ s

PR-3.13. *¡Si atrapas ese billete, puedes quedártelo!*

El tiempo de reacción es el tiempo total que una persona tarda en darse cuenta, pensar y actuar en respuesta a una situación imprevista. Este tiempo depende de la rapidez de la persona y de la complejidad de la situación.

Para determinar tu tiempo de reacción pídele a un amigo que sostenga una regla (de casi 30cm), con el cero en el extremo inferior. Coloca tus dedos cerca del cero sin apretar, y pídele al amigo que suelte la regla sin avisar. Tan pronto suelte la regla, ¡trate de detenerla!

a) Halle una expresión para el tiempo de reacción en términos de la longitud de descenso de la regla.
b) Un tiempo de reacción típico para una persona muy rápida, es 0,16 segundos. Si este joven coloca sus dedos a la mitad de un billete de 16 cm de largo, podrá atraparlo?

Solución: a) Si tomamos el origen en el borde inferior del billete (o cero de la regla) y el sentido positivo del eje y hacia abajo, las condiciones iniciales son:

$$t = 0: \quad y_0 = 0, \; v_0 = 0, \; a = +g$$

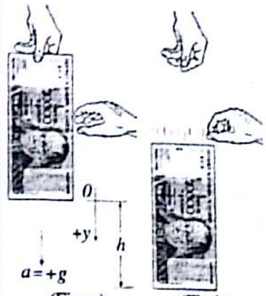
La distancia de caída es:

$$y = h = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_r = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h(cm)}{980\text{cm/s}^2}} = \sqrt{\frac{2h(cm)}{980\text{cm/s}^2}} = 0{,}045\sqrt{h}$$

b) Si $t_r = 0{,}16$ s, en ese tiempo el billete habrá descendido una altura:

$$h = \frac{1}{2}(980\text{cm/s}^2)(0{,}16\text{s})^2 = 12{,}5\text{cm} > 9 \text{ cm}$$



(Fig. a) (Fig.b)

Respuesta

a) $t_r = 0{,}045\sqrt{h}$ s, h en cm.
b) No puede atraparlo

PR-3.14. *¡Podrá el estudiante alcanzar al autobús!*

Un estudiante corre a velocidad v_e = 6 m/s para tratar de alcanzar el autobús. En el instante en que el estudiante está a 10 m de la puerta, el autobús arranca con una aceleración constante a_a = 1,6 m/s².

a) ¿Si el estudiante mantiene su velocidad constante, logrará abordar el autobús ?
b) Si logra abordarlo, ¿en que momento puede hacerlo?

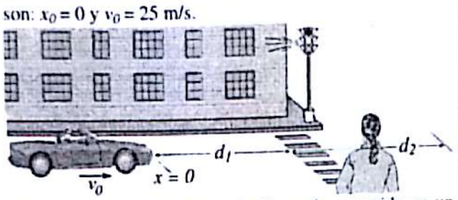
Solución: Tomemos el origen de coordenadas en la posición inicial del estudiante (x_{eo} = 0). En t = 0 la puerta del autobús estará a una distancia x_{ao} = 10 m. Las ecuaciones de movimiento para el estudiante y la puerta del autobús son, respectivamente:

$$x_e(t) = x_{eo} + v_e t = 0 + 6t = 6t$$

$$x_a(t) = x_{ao} + v_{ao} t + \frac{1}{2} a_a t^2 = 10 + 0 + \frac{1}{2}(1{,}6)t^2 = 10 + 0{,}8t^2$$

Para que el estudiante alcance la puerta del autobús en un cierto instante t, debe cumplirse la condición $x_e = x_a$. Por lo tanto:

Solución: En el instante inicial $t_0 = 0$ las condiciones son: $x_0 = 0$ y $v_0 = 25$ m/s.



Aplicamos la expresión para la distancia recorrida en un movimiento con aceleración constante:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Si el conductor aplica los frenos, mientras la luz amarilla esté encendida, el automóvil viajará una distancia:

$$x = (25\text{m/s})(4\text{s}) + \frac{1}{2}(-4\text{m/s}^2)(4\text{s})^2 = 68\text{m}$$

O sea que, el automóvil se detendría a 2 m antes del semáforo. En cambio, si el conductor aplica el acelerador, el automóvil viajará una distancia:

$$x = (25\text{m/s})(4\text{s}) + \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(4\text{s})^2 = 116\text{m}$$

Como esta distancia es menor que la distancia total disponible (70m + 50m = 120 m), el automóvil no lograría atravesar la calle antes de que se encienda la luz roja. Por lo tanto, el conductor debe frenar.

Respuesta:

$\boxed{\text{Debe frenar}}$

PR-3.11. *¿Se podrá evitar la colisión?*

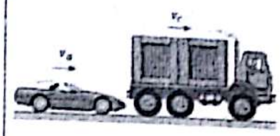
El conductor de un automóvil que viaja a 108 km/h de repente se encuentra que la vía se reduce a un solo canal y apenas a 50 m, va un camión a una velocidad de 54 km/h.

¿Si el conductor del automóvil frena con una deceleración constante, cuál debe ser el valor mínimo para evitar que choque al camión por detrás?

Solución: Tomando en cuenta las condiciones iniciales para $t_0 = 0$, las ecuaciones de movimiento son:

Automóvil: $x_{a0} = 0$ $\qquad x_a = v_{a0}t - \frac{1}{2}at^2$

Camión: $x_{0c} = d$ $\qquad x_c = d + v_c t$



Para que la colisión apenas no ocurra, debe cumplirse:

$x_a = x_c$ $\qquad v_{a0}t - \frac{1}{2}at^2 = d + v_c t \qquad (1)$

Además, la deceleración debe ser suficiente para que el automóvil "apenas" toque al camión, es decir, debe tener una velocidad igual a la de éste, $v_a = v_c$:

$$v_{a0} - at = v_c \qquad (2)$$

El valor de a, se obtiene eliminando el tiempo de las ecuaciones (1) y (2):

$$a = \frac{(v_{a0} - v_c)^2}{2d}$$

Sustituyendo los valores: $d = 50$ m, v_{a0}=108 km/h = 30 m/s y v_c= 54 km/h = 15 m/s, obtenemos la mínima deceleración requerida:

$$a = \frac{(30\text{m/s} - 15\text{m/s})^2}{2(50\text{m})} = 2.25\text{m/s}^2$$

Respuesta:

$$\boxed{a = \frac{(v_{a0} - v_c)^2}{2d} = 2.25\text{m/s}^2}$$

PR-3.12. *Tiempo de reacción de un conductor*

Cuando a un conductor se le presenta una situación sorpresiva, tarda un cierto tiempo entre la toma de decisión de pisar los frenos y su aplicación real. Es el tiempo total que tardan los impulsos eléctricos desde el estímulo visual a los ojos, de los ojos al cerebro y luego, el envío de la información del cerebro a los pies.

Suponga que cuando estás conduciendo un automóvil a 90 km/h (25 m/s), puedes detenerlo en una distancia de 60 m, y si vas a 54 km/h (15 m/s), lo detienes en 25 m.

a) ¿Cuál es la deceleración del automóvil suponiendo la misma para ambos casos?

b) ¿Cuál es tu tiempo de reacción?

Solución: Durante el tiempo de reacción, t_r el automóvil sigue viajando a velocidad constante v_o, en una distancia:

$$x_1 = v_o t_r$$

Durante el tiempo de frenado t_f, el automóvil se desplaza una distancia:

$$x_2 = v_0 t_f - \frac{1}{2}at_f^2$$

La distancia total recorrida es:

Datos:

$v_{0A} = 25$ m/s, $d_A = 60$ m

$v_{0B} = 15$ m/s, $d_B = 25$ m

Por lo tanto:

$$d=\frac{1}{2}a_1[\frac{a_2}{a_1+a_2}(T-t_0)](T+t_0)=\frac{1}{2}\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}(T^2-t_0^2)$$

Despejando:

$$T^2=t_0^2+2d(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})$$

Queda demostrado que el tiempo de viaje total, T, es *mínimo* cuando el tiempo t_0 del paso intermedio, es cero.

Respuesta:

Tiempo mínimo:
$$T_{min}=\sqrt{2d(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}$$
para $t_0=0$

PR-3.08. *Aceleración y deceleración en el metro*

Un vagón del metro parte de la estación A con aceleración constante a_1 = 0,10 m/s^2, y al cabo de un tiempo apropiado, frena con deceleración constante de módulo = 0,20 m/s^2, hasta detenerse en la estación B. La distancia entre las dos estaciones es 1 km, que es suficiente para que el vagón nunca alcance una velocidad máxima.

a) ¿Durante qué tiempo t_1 el vagón acelera y durante qué tiempo t_2, frena?
b) ¿En qué parte del recorrido, el vagón acelera y en qué parte del recorrido, frena?

Solución: a) Las distancia total recorrida es la suma de las distancias durante los intervalos de tiempo, t_1, y t_2:

$$d=x_1+x_2=\frac{1}{2}a_1t_1^2+(v_0t_2-\frac{1}{2}a_2t_2^2)$$

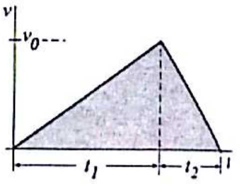
Siendo: $v_0=a_1t_1=a_2t_2$

$$d=\frac{1}{2}a_1t_1^2+a_1t_1(\frac{a_1t_1}{a_2})-\frac{1}{2}a_2(\frac{a_1t_1}{a_2})^2$$

$$d=\frac{1}{2}a_1t_1^2(1+\frac{a_1}{a_2})=\frac{1}{2}a_1t_1^2(\frac{a_2+a_1}{a_2})$$

$$t_1=\sqrt{\frac{2da_2}{a_1(a_2+a_1)}}=\sqrt{\frac{2(1000)(0,20)}{0,10(0,20+0,10)}}=116\text{s}$$

$$t_2=\frac{a_1}{a_2}t_1=\frac{0,10\text{m/s}^2}{0,20\text{m/s}^2}116\text{s}=57,7\text{s}$$



Las distancias recorridas durante la aceleración y deceleración fueron:

$$x_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}(0,10\text{m/s}^2)(116\text{s})^2=667\text{m}$$

$$x_2=(0,10)(116\text{s})(57,7)-\frac{1}{2}(0,2)(57,7)^2=333\text{m}$$

Respuesta:

a) $t_1=116$s, $t_2=57,7$s
b) $x_1=667$m, $x_2=333$m

PR-3.09. *¿Cómo determinar la profundidad del pozo?*

Una niña deja caer una moneda en un pozo profundo y simultáneamente activa un cronómetro. Este se detiene cuando la niña escucha el golpe de la moneda contra el agua, y da una lecturas de 2,5 segundos.
¿Cuál es la profundidad del pozo ?

• Tome para la velocidad del sonido en el aire: v_s = 340 m/s.

Solución: El tiempo total T desde que se suelta la moneda hasta que se oye el sonido, es la suma del tiempo t_m de caída de la moneda y el tiempo t_s de viaje de la onda sonora: $T=t_m+t_s$. Tanto la moneda como el sonido recorren la misma distancia h:

Moneda: $h=\frac{1}{2}gt_m^2$ Sonido: $h=v_st_s$

Suelto la moneda en el pozo y pido un deseo

Donde v_s es la velocidad del sonido. Igualando estas dos expresiones y eliminando t_s se obtiene:

$$\frac{1}{2}gt_m^2=v_s(T-t_m) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}gt_m^2+v_st_m-v_sT=0$$

$$t_m=\frac{-v_s\pm\sqrt{v_s^2+2gv_sT}}{g}$$

Como t_m debe ser positivo, tomamos la solución con signo (+). Sustituyendo los valores numéricos:

$$t_m=\frac{-340\pm\sqrt{340^2+2(9,80)(340)(2,50)}}{9,80}=2,42\text{ s}$$

Finalmente, la altura de caída de la moneda es la profundidad h del pozo:

$$h=\frac{1}{2}gt_m^2=\frac{1}{2}(9,80)(2,42)^2=28,6\text{ m}$$

Respuesta:

h = 28,6 m.

PR-3.10. *Ante la luz amarilla del semáforo, ¿qué hacer?*

Un automóvil que se desplaza a 90 km/h (25 m/s) se acerca a una vía transversal. Cuando está a una distancia d_1 = 70 m del semáforo, se prende la luz amarilla la cual tiene una duración de 4 s. La distancia que separa el semáforo de la siguiente esquina es: d_2 = 50.

¿Qué debería hacer el conductor si se le da estas dos opciones:
a) Acelerar a +2 m/s^2 ?
b) Frenar a -4 m/s^2?

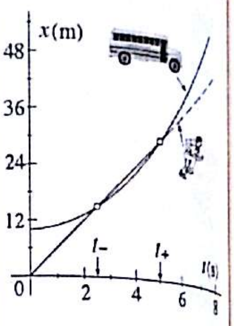
$$6t = 10 + 0{,}8t^2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}8t^2 - 6t + 10 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4(0{,}8)(10)}}{2(0{,}8)} = \frac{6 \pm 2}{1{,}6}\Bigg|_{t_+ = 5{,}0\text{s}}^{t_- = 2{,}5\text{s}}$$

Obtenemos así dos raíces reales, ambas positivas, pero ¿cuál representa la solución al problema?.

Según el gráfico de x vs t, el estudiante puede tener dos encuentros con la puerta en tiempos distintos y por lo tanto, ambas soluciones son posibles. El tiempo $t_- = 2{,}5$ s corresponde al instante en que el estudiante alcanza la puerta del autobús "por primera vez". El estudiante podría optar por detener su marcha instantáneamente y abordar el autobús en ese momento. Suponga que no lo haga en ese instante y decidiera continuar su marcha. Como su velocidad es mayor que la del autobús, lo pasará. Pero el autobús está acelerado, y su velocidad va aumentando hasta que en $t_+ = 5$ s "el autobús alcanza al estudiante".



Respuesta:

a) Si puede abordarlo.
b) En los instantes: $t = 2{,}5$ s y $t = 5$ s

PR-3.15. *Una investigadora científica y detective*

En la residencia estudiantil celebran la llegada del carnaval dejando caer bombas de agua. La madre superiora, no pudiendo asomarse a la ventana, le pide a la profesora de física que la ayude a determinar la procedencia de dichas bombas. La profesora toma sus instrumentos de medición y determina que una bomba tarda 0,15 s en descender la altura de 1,50 m de la ventana. Suponiendo que la bomba se suelta sin velocidad inicial, y que la altura de cada piso del edificio es 2,90 m, ¿en qué piso se encuentra la estudiante que la dejó caer ?

Solución: Tomemos $y = 0$ en el punto donde se sueltan las bombas, con el eje y positivo hacia abajo. Sean v_1 y v_2 las velocidades de la bomba en el borde superior e inferior de la ventana, respectivamente. Como la aceleración es constante, la velocidad media en un trayecto de longitud Δy es el promedio aritmético de las velocidades:

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1{,}5\text{m}}{0{,}15\text{s}} = 10\text{m/s}$$

$$v_1 + v_2 = 20\text{m/s} \qquad (1)$$

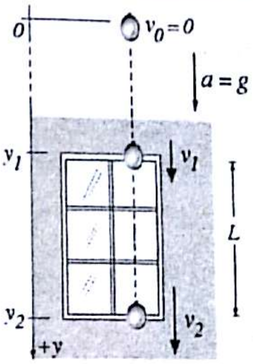
Por otra parte, estas dos velocidades están relacionadas por:

$$v_2 = v_1 + a\Delta t = v_1 + g\Delta t$$

$$v_2 - v_1 = g\Delta t = (9{,}80\text{m/s}^2)(0{,}15\text{s}) = 1{,}47\text{m/s} \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) se obtienen las velocidades:

$$v_1 = 9{,}27 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_2 = 10{,}7 \text{ m/s}$$



Ahora podemos hallar la altura H de caída desde $y = 0$ (donde se soltó la bomba, $v_0 = 0$) hasta $y = y_2$ (nivel inferior de la ventana):

$$v_2^2 = v_0^2 + 2gH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(10{,}7\text{m/s})^2}{2(9{,}80\text{m/s}^2)} = 5{,}84\text{m}$$

Dividiendo esta distancia entre la altura de cada piso obtenemos: $5{,}84\text{m}/2{,}90\text{m} = 2{,}01$. Por lo tanto, la estudiante se encuentra a dos pisos por encima del cuarto de observación !

Respuesta:

A dos pisos por encima

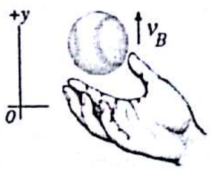
PR-3.16. *Choque de dos pelotas lanzadas al aire*

Se lanzan dos pelotas de béisbol verticalmente hacia arriba, desde la misma posición inicial con una diferencia de tiempo $\Delta t = 1{,}2$ s. La velocidad inicial de la primera pelota es $v_{A0} = 15{,}0$ m/s y velocidad inicial de la segunda es $v_{B0} = 12{,}0$ m/s. ¿A qué altura chocarán las pelotas?.

Solución: Tomando el origen en la posición vertical de la mano, las condiciones iniciales son:

Pelota A: $t = 0$: $y_{A0} = 0$, $v_{A0} = 15{,}0$ m/s

Pelota B: $t = \Delta t = 1{,}2$ s, $y_{B0} = 0$, $v_{B0} = 12{,}0$ m/s



Ambas pelotas están sometidas a la misma aceleración, $a = -g$, y sus posiciones en función del tiempo son:

$$y_A = y_{A0} + v_{A0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = v_{A0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$y_B = y_{B0} + v_{B0}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = v_{B0}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

El tiempo t_1 se empieza a contar desde cero, mientras que t_2 se empieza a contar después de 1,2 s, por lo tanto:

$$t_1 = \Delta t + t_2 = 1{,}2s + t_2$$

En el instante en que las pelotas chocan, se igualan sus posiciones ($y_B = y_A$):

$$v_{A0}(1{,}2+t_2) - \frac{1}{2}g(1{,}2+t_2)^2 = v_{B0}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

Sustituyendo los valores numéricos:

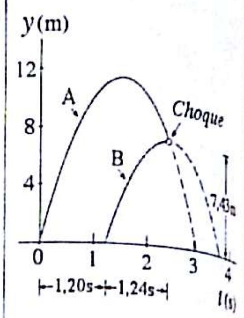
$$(15)(1{,}2+t_2) - \frac{1}{2}9{,}8(1{,}2+t_2)^2 = 12t_2 - \frac{1}{2}9{,}8t_2^2$$

$$18 + 15t_2 - 7{,}06 - 11{,}8t_2 - 4{,}9t_2^2 = 12t_2 - 4{,}9t_2^2$$

$$8{,}8t_2 = 10{,}9 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 1.24s, \quad t_1 = 1.20 + t_2 = 2.44s$$

La altura a la cual ocurre el choque es:

$$h = y_A = (15)2.44 - \frac{1}{2}(9.80)(2.44)^2 = 7.43m$$



Respuesta:

$\boxed{h = 7.43m}$

PR-3.17. *La mitad del recorrido en el último segundo.*

Un objeto se suelta desde reposo a una altura h y se observa que en el último segundo de su caída recorre $h/2$.
a) ¿Cuál fue el tiempo total de caída?
b) ¿Desde qué altura cayó?

Solución: a) Tomemos el origen $y = 0$ en el punto arriba donde se suelta la pelota, y el sentido del eje $+y$ hacia abajo. Las condiciones iniciales en $t_0 = 0$ son: $y_0 = 0$, $v_0 = 0$. La aceleración es constante, $a = +g$. Si la pelota choca con el suelo en el instante t, la altura h de caída es:

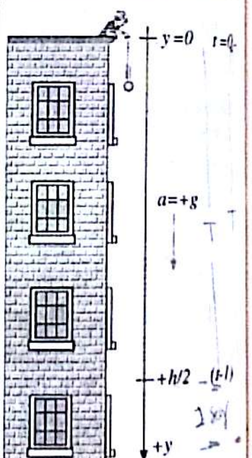
$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

Como la pelota recorre la segunda mitad en un segundo, la primera mitad la recorre en $(t - 1)$ segundos. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \quad \Rightarrow \quad h = g(t-1)^2 \qquad (2)$$

Igualando las dos expresiones (1) y (2) para h, simplificando y desarrollando se tiene:

$$\frac{1}{2}gt^2 = g(t-1)^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t + 2 = 0$$



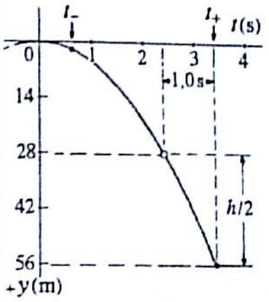
Las raíces de esta ecuación son:

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = (2 \pm \sqrt{2}) \quad \begin{cases} t_- = 0{,}585s \\ t_+ = 3{,}41s \end{cases}$$

En las condiciones de este problema, sólo tiene sentido físico el tiempo, $t_+ = 3{,}41s$ que es mayor que un segundo. La solución $t_- = 0{,}585s$ correspondería a un evento anterior, en el que se lanzara la pelota desde abajo hacia arriba para que llegase al punto máximo en $t = 0$ con $v = 0$, y luego empiece a caer.

b) La altura de caída durante el tiempo de 3,41s es:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\frac{m}{s^2})(3{,}41)^2 = 57{,}0 \text{ m}$$



Respuesta:

a) $t = 3{,}41$ s
b) $h = 57{,}0$ m

PR-3.18. *¡Caída desde un globo que sube!*

Un globo con pasajeros asciende verticalmente a una rapidez constante de 9,8 m/s. Cuando se encuentra a una altura $H = 39{,}2$ m sobre el suelo, se deja caer un paquete.
a) ¿Cuánto tiempo estará el paquete en el aire después que se ha soltado?
b) ¿Cuál será su velocidad justo en el momento de chocar con el suelo?

Solución: a) En la figura se toma el origen $y = 0$ en el suelo y el sentido del eje $+y$ hacia arriba. Para calcular el tiempo de caída, aplicamos la ecuación de cinemática para aceleración constante, $a = -g$:

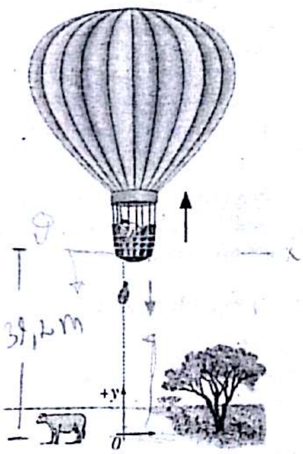
$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Con las condiciones iniciales:

$t_0 = 0$: $\quad y_0 = H = +39{,}2$ m, $\quad v_0 = +9{,}8$ m/s.

La condición para v_0 es debida a que en el instante de soltarlo, el paquete lleva la misma velocidad que el globo. En el instante t el paquete choca contra el suelo y su coordenada es $y(t)$ es cero, por lo tanto:

$$0 = H + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad gt^2 - 2v_0 t - 2H = 0$$



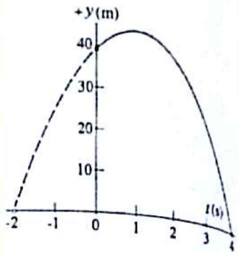
Resolviendo la ecuación cuadrática en t:

$$t=\frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2+8gH}}{2g}=\frac{v_0}{g}\pm\sqrt{(\frac{v_0}{g})^2+2\frac{H}{g}}$$

$$t=\frac{9{,}80\text{m/s}}{9{,}80\text{m/s}^2}\pm\sqrt{(\frac{9{,}80\text{m/s}}{9{,}80\text{m/s}^2})^2+\frac{2\text{x}39{,}2\text{m}}{9{,}80\text{m/s}^2}} \Rightarrow \begin{cases} t_- = -2\text{s} \\ t_+ = +4\text{s}\end{cases}$$

En este problema solo tiene significado físico la solución positiva, $t_+ = 4$s.

La solución negativa t_-=-2s. correspondería a un tiempo anterior a cuando el paquete fue soltado desde el globo, y sería como si en ese evento, el paquete hubiese sido lanzado desde el suelo hacia arriba. Esto queda ilustrado en la gráfica de y vs t.



b) La velocidad final del paquete cuando llega al suelo es:

$$v = v_0 - gt = 9{,}80\text{m/s} - (9{,}80\text{m/s}^2)(4\text{s}) = -29{,}4\text{m/s}$$

El signo (-) aparece por haber escogido el sentido del eje y positivo hacia arriba. Por lo tanto, la velocidad final $\vec{v}$ apunta hacia abajo.

Respuesta:

a) $t = 4$ s
b) $\vec{v}$ = -29,4 $\hat{y}$ m/s

PR-3.19. ***¡Colisión de pelotas en el aire!***

Desde cierta altura H, un niño deja caer la pelota A. En el mismo instante, su hermana lanza la pelota B desde abajo hacia arriba, en la misma dirección vertical, a una altura h y con velocidad inicial v_{OB}.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo chocarán las dos pelotas ?
b) ¿ Irá la pelota B subiendo o bajando cuando choca?

Solución: a) Tomemos el origen en el suelo y la dirección y positiva hacia arriba. Para ambas pelotas la aceleración es a = -g, y sus posiciones son:

Condiciones iniciales

$Y_{A0} = H, \quad v_{A0} = 0$

$y_{B0} = h, \quad v_{B0} \neq 0$

Pelota A: $\quad y_A = y_{OA} + v_{OA}t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2 = y_A$

Pelota B: $\quad y_B = y_{OB} + v_{OB}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_{OB}t - \frac{1}{2}gt^2 = y_B$

En el momento en que las pelotas chocan, sus coordenadas coinciden ($y_A = y_B$), por lo tanto:

$$H - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_{OB}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$H - h = v_{OB}t \qquad \text{o} \qquad t = \frac{H-h}{v_{OB}}$$

b) Para saber si en ese instante la pelota B iba subiendo o bajando, calculemos su velocidad:

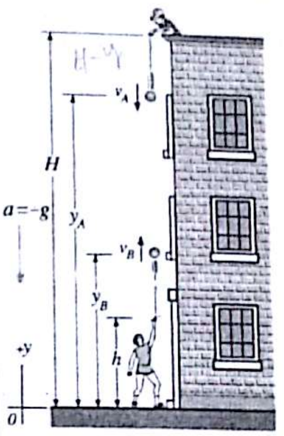
$$v_B = v_{BO} - gt = v_{BO} - g(\frac{H-h}{v_{BO}}) = g\frac{v_{BO}^2 - g(H-h)}{v_{BO}}$$

De acuerdo a esta expresión, dependiendo del valor de la velocidad inicial v_{BO} podrían suceder tres casos:

i) Si $v_{BO} = \sqrt{g(H-h)} \Rightarrow \quad v_B = 0$ y el choque ocurre justo en el instante en que la pelota B alcanza su altura máxima.

ii) Si $v_{BO} > \sqrt{g(H-h)} \Rightarrow \quad v_B > 0$ y el choque ocurre cuando aun la pelota B va subiendo.

iii) Si $v_{BO} < \sqrt{g(H-h)} \Rightarrow \quad v_B < 0$ y el choque ocurre cuando la pelota B va bajando.



Respuesta:

a) $t = \frac{H-h}{v_{OB}}$

b) Pudiera ir subiendo, bajando o estar en el tope de su trayectoria.

PR-4.20. ***Malabarismo en la calle***

Un malabarista tiene la habilidad de sincronizar el tiempo en que puede ir arrojando al aire un número de pelotas mientras las va recibiendo y pasando a la otra mano. Suponga que tarda 0,5 s entre recibir una pelota, pasarla a la otra mano y estar listo para atrapar la siguiente.

a) ¿Si desea hacer el acto con *tres* pelotas, con qué velocidad vertical debe arrojar cada una?
b) ¿A qué altura debe lanzarlas por encima de sus manos para manejar *cuatro* pelotas?
c) ¿Cuál sería el número máximo de pelotas que puede mantener en el aire si realiza el show en un sitio donde el techo queda a una altura 5 m por encima de sus manos?

Solución: a) Tomemos el origen en la mano que lanza la pelota y el eje vertical con +y hacia arriba. Como hay tres pelotas con un intervalo de 0,5 s entre ellas, el tiempo para completar un ciclo es 1,5 s.

Solución: a) Partiendo de la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -k \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v} = -kt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

La constante k es:

$$k = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{90}\,\mathrm{m}^{-1}$$

La velocidad es:

$$v = \frac{v_0}{1 + ktv_0} = \frac{6}{1 + t6/90} = \frac{90}{15 + t} \ \ \mathrm{m/s}$$

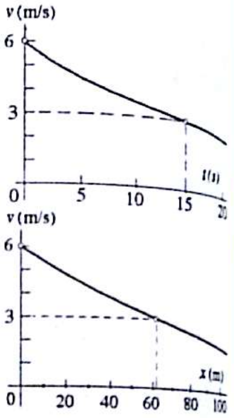
Para hallar x, integramos esta expresión:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \int_0^x dx = \int_0^t vdt = \int_0^t \frac{90}{15+t} dt = 90\,ln(15+t)\Big|_0^t$$

$$x = 90\,ln\frac{15+t}{15} = 90\,ln(1 + \frac{t}{15})$$

c) La velocidad en función de x es:

$$t = 15(e^{x/90} - 1) \qquad v(x) = 6e^{-x/90}$$

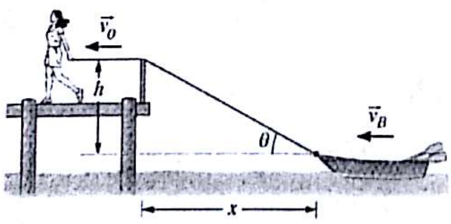


Respuesta

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + ktv_0} = \frac{540}{90 + 6t}$$
$$x(t) = \frac{ln(1 + ktv_0)}{k} = 90\,ln(1 + \frac{t}{15})$$
$$v(x) = v_0e^{-kx} = 6e^{-x/90}$$

PR-3.30. *¿Con qué velocidad se acerca el bote?*

Una persona está en un muelle y tira mediante una cuerda de un bote que está en el agua.



Si la persona recoge la cuerda a una velocidad constante v_o, ¿con qué velocidad se mueve el bote hacia el muelle en el momento en que el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es θ?

Solución: Si x es la distancia horizontal del bote al muelle y h la altura del punto de apoyo de la cuerda respecto al bote, la longitud del tramo de la cuerda es:

$$L = \sqrt{x^2 + h^2}$$

La rapidez con que se va acortando el pedazo de cuerda es:

$$v_0 = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)2x\frac{dx}{dt}$$

Tomando en cuenta que dx/dt es la velocidad del bote v_B, se obtiene:

$$v_0 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right)\frac{dx}{dt} = cos\theta v_B$$

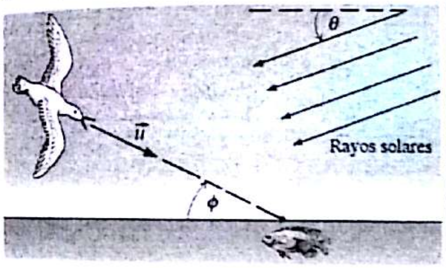
$$v_B = v_0 / cos\theta$$

Respuesta:

$$\boxed{v_B = v_0 / cos\theta}$$

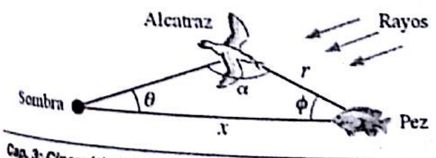
PR-3.31. *Movimiento de la sombra del alcatraz*

Un alcatraz anda en busca de comida y desde cierta altura divisa un pez en el agua.



El alcatraz desciende en picada en línea recta a una velocidad $\vec{u}$ que forma un ángulo ϕ con la horizontal. En ese momento los rayos solares están incidiendo a un ángulo θ por encima del horizonte. ¿Con qué velocidad se desplaza sobre la superficie del agua la sombra del alcatraz?

Solución: Consideremos el triángulo formado por el punto fijo en el pez y por los dos puntos móviles: el alcatraz y la sombra:



VERIFICA TU COMPRENSIÓN

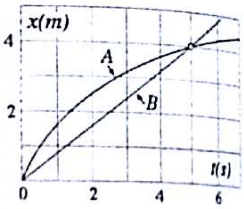
PE-3.01. *¿Verdadero o Falso ?*

Cuál de las siguientes afirmaciones es la única *verdadera*:

a) Si en un instante determinado la aceleración de una partícula es positiva, su velocidad es también positiva.
b) Si la aceleración es cero, la partícula está en reposo.
c) Si una partícula está en reposo en un cierto instante, su aceleración es cero en ese instante.
d) La velocidad de una partícula no puede aumentar si su aceleración está disminuyendo.
e) Una partícula puede tener velocidad instantánea nula aun cuando esté acelerada.

PE-3.02. *Comparación de dos movimientos*

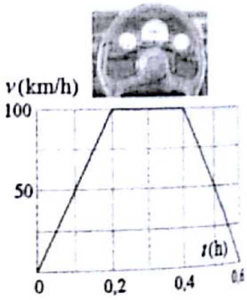
Dos atletas, A y B corren en una pista recta y el gráfico muestra la posición x(m) en función del tiempo t(s), al comienzo de la competencia. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



a) Tanto la velocidad de A como la de B está aumentando.
b) En el instante $t = 5$ s, tienen igual velocidad.
c) En el instante $t = 5$ s, tienen igual aceleración.
d) En un instante comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$ s, los dos atletas tienen igual velocidad.
e) En un instante comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$ s, los dos atletas tienen igual aceleración.

PE-3.03. *El velocímetro y el odómetro del carro*

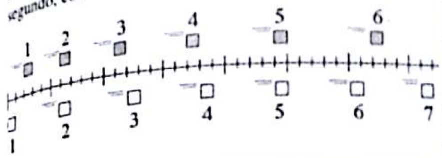
El velocímetro de un carro indica su velocidad instantánea, mientras que el odómetro (cuenta kilómetros) indica la distancia total que ha recorrido. Una persona quiere comprar un carro en una agencia y solicita que le den una demostración. El carro salió de la agencia en cero km, y durante el recorrido, el comprador va anotando las lecturas del velocímetro (en km/h) para distintos instantes de tiempo (en horas), obteniendo el gráfico mostrado. ¿Cuál será la lectura final del odómetro,



a) 20 km b) 40 km c) 50 km d) 60 km e) 80 km

PE-3.04. *Compare estos dos movimientos.....*

Dos carros se mueven paralelamente en línea recta, hacia la derecha. Sus posiciones fueron registradas cada segundo, como se representa en la figura siguiente:

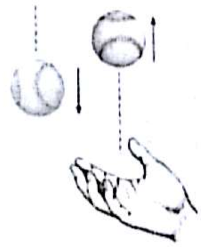


De acuerdo a la información suministrada, los dos carros tienen la misma velocidad media:

a) en el intervalo de 1 a 2.
b) en el intervalo de 3 a 4.
c) en el instante 2.
d) en el instante 5.
e) nunca.

PE-3.05. *Si tomamos en cuenta la fricción del aire*

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. Si se tiene en cuenta la *fricción* que presenta el aire sobre la pelota y comparamos el tiempo de bajada con el de subida, podemos asegurar que:



a) la pelota tarda igual tiempo en bajar que en subir
b) la pelota tarda mas tiempo en bajar que en subir
c) la pelota tarda menos tiempo en bajar que en subir
d) no se puede predecir el resultado.

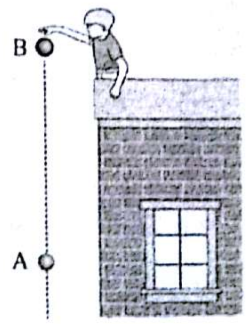
PE-3.06. *Soltando dos pelotas de diferentes alturas*

Dos pelotas, A y B, se dejan caer simultáneamente desde alturas diferentes de la misma vertical. A medida que las pelotas caen, la distancia entre ellas....

a) aumenta, b) disminuye, c) permanece constante

PE-3.07. *Soltando dos pelotas en diferentes instantes*

Una pelota, A, se deja caer desde cierta altura y un segundo después se deja caer otra pelota, B, desde la misma altura. A medida que las dos pelotas caen, la distancia entre ellas....



a) aumenta,

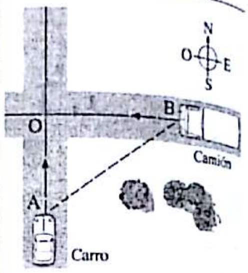
b) disminuye,

c) es constante.

Solución: Al cabo de un tiempo t la distancia de cada vehículo al cruce es:

$$d_A = d_{A0} - v_A t = 40 - 48t$$

$$d_B = d_{B0} - v_B t = 50 - 36t$$



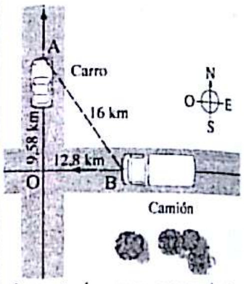
Aplicando Pitágoras, el cuadrado de la distancia entre el carro y el camión en función del tiempo, es:

$$\overline{AB}^2 = d_A^2 + d_B^2 = (40 - 48t)^2 + (50 - 36t)^2$$

Para que la distancia tenga el menor valor posible, se debe cumplir la condición: $d(\overline{AB}^2)dt = 0$.

$$\frac{d}{dt}(\overline{AB}^2) = 2(40 - 48t)(-48) + 2(50 - 36t)(-36) = 0$$

$$3600t = 3720 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3720}{3600} = 1{,}033 \text{ horas}$$



Instante de mayor acercamiento

Determinemos dónde se encontrará cada vehículo en el momento de mayor aproximación:

$$d_A = d_{A0} - v_A t = 40 - 48(1{,}033) = -9{,}58\text{km}$$

$$d_B = d_{B0} - v_B t = 50 - 36(1{,}033) = +12{,}8\text{km}$$

El signo negativo en d_A indica que en ese instante, el carro ya habrá rebasado el cruce en 9,58 km, mientras que al camión todavía le falta 12,8 km para llegar. La distancia entre los vehículos es:

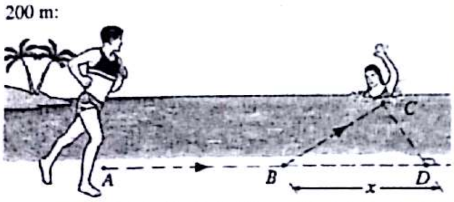
$$\overline{AB}_{min} = \sqrt{d_A^2 + d_B^2} = \sqrt{(-9{,}58\text{km})^2 + (12{,}8\text{km})^2} = 16\text{km}$$

Respuesta:

$t = 1{,}033$
$\overline{AB}_{min} = 16\text{km}$

PR-3.28. *El sitio mas apropiado para lanzarse al agua*

Un salvavidas estando en el punto A en la playa oye los gritos de una muchacha que pide auxilio desde un punto C, situado a una distancia perpendicular a la orilla, CD = 200 m:



El salvavidas sabe que puede correr en la arena a 6 m/s, pero puede nadar solo a 1,5 m/s. ¿Hasta que punto B debe llegar corriendo paralelamente a la orilla, para desde allí lanzarse al agua y llegar hasta la muchacha en el menor tiempo posible?

Solución: Si v_1 es la velocidad del salvavidas cuando corre en la arena, el tiempo para recorrer la distancia $\overline{AB}$ es:

$$t_{AB} = \frac{\overline{AB}}{v_1} = \frac{\overline{AD} - x}{v_1}$$

Si v_2 es la velocidad de nado, el tiempo necesario para ir de B a C es:

$$t_{BC} = \frac{\overline{BC}}{v_2} = \frac{\sqrt{\overline{CD}^2 + x^2}}{v_2}$$

El tiempo total para ir desde A hasta C será la suma:

$$T = t_{AB} + t_{BC} = \frac{\overline{AD} - x}{v_1} + \frac{\sqrt{\overline{CD}^2 + x^2}}{v_2}$$

$$T = \frac{\overline{AD} - x}{6} + \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{1{,}5}$$

Para que la función $T(x)$ tenga un valor mínimo se impone la condición: $dT/dx = 0$:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2(1{,}5)}\frac{2x}{\sqrt{200^2 + x^2}} = 0$$

Despejando x:

$$\sqrt{200^2 + x^2} = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 51{,}6 \text{ m}$$

Respuesta

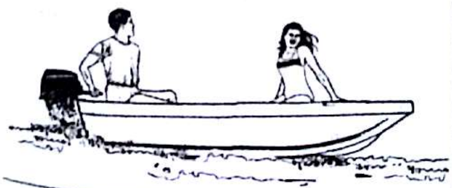
Debe lanzarse al agua a una distancia: x = 51,6 metros de D.

PR-3.29. *Movimiento retardado por la fricción del agua*

Cuando se le apaga el motor a una lancha que marcha a cierta velocidad, la fricción con el agua lo va frenando con una deceleración que es proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea:

$$dv/dt = -kv^2$$

Donde k (en m^{-1}) es una constante.



Suponga que el motor se apaga cuando la velocidad es v_o = 6 m/s y que esta disminuye a v = 3 m/s, en un tiempo t = 15 s. Determine:

a) La velocidad de la lancha en función del tiempo.
b) La posición en función del tiempo.
c) La velocidad en función de la posición.

Aplicando el teorema de los senos, hallamos la relación entre la distancia r del alcatraz al pez y la distancia x de la sombra al pez:

$$\frac{r}{sen\theta}=\frac{x}{sen\alpha}$$

Como $sen\alpha = sen(\theta+\phi)$, despejando x:

$$sen\alpha = sen[180^\circ-(\theta+\phi)]$$
$$sen\alpha = sen(\theta+\phi)$$

$$x = r[\frac{sen(\theta+\phi)}{sen\theta}]$$

Los ángulos θ y ϕ permanecen fijos, por lo tanto si derivamos x respecto al tiempo obtenemos la rapidez de la sombra:

$$v_s=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}[r\frac{sen(\theta+\phi)}{sen\theta}]=[\frac{sen(\theta+\phi)}{sen\theta}]\frac{dr}{dt}$$

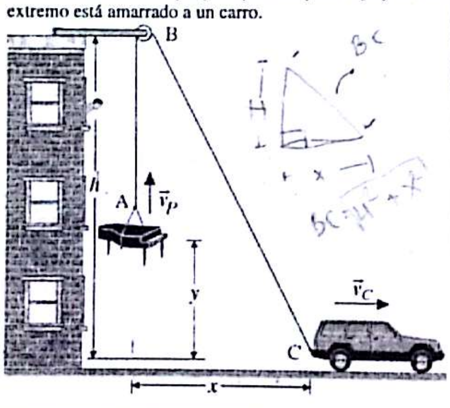
$$v_s=[\frac{sen(\theta+\phi)}{sen\theta}]u$$

Respuesta:

$$\boxed{\vec{v}_s = u[\frac{sen(\theta+\phi)}{sen\theta}]i}$$

PR-3.32. *Elevando un piano con movimiento acelerado*

Para elevar un piano hasta un tercer piso, se le suspende mediante una cuerda que pasa por una polea fija y el otro extremo está amarrado a un carro.



La longitud total de la cuerda es L = 24 m, la polea está a una altura H = 12 m, y la velocidad del carro es *constante*, v_c = 0,4 m/s. Cuando el piano va por la posición x = 16 m, determine:
a) La velocidad v_P del piano.
b) La aceleración a_P del piano.
¿Por qué si la velocidad del carro es constante, el piano sube aceleradamente?

Solución: La longitud de la cuerda es la suma de las longitudes de los dos tramos:

$$L=\overline{AB}+\overline{BC}=(H-y)+\sqrt{H^2+x^2}$$

$$24=(12-y)+\sqrt{12^2+x^2} \quad \Rightarrow \quad y(x)=\sqrt{144+x^2}-12$$

La velocidad del piano es:

$$v_P=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{144+x^2}-12)$$

Tomando en cuenta que dx/dt es la velocidad del carro, v_C, se obtiene:

$$v_P=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{144+x^2}}(\frac{dx}{dx})=\frac{x}{\sqrt{144+x^2}}v_C.$$

En el instante en que la posición del carro es x = 16 m el piano va por una altura y = 8 m y su velocidad es:

$$v_P=\frac{16}{\sqrt{144+16^2}}v_C=0{,}8x0{,}4m/s=0{,}32\ m/s$$

b) La aceleración instantánea del piano es:

$$a_P=\frac{dv_P}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{144+x^2}}v_C$$

$$a_P=[\frac{dx/dt}{(144+x^2)^{1/2}}+(-\frac{1}{2})\frac{2x^2(dx/dt)}{(144+x^2)^{3/2}}]v_C$$

$$a_P=\frac{144v_C^2}{(144+x^2)^{3/2}}=\frac{144(0{,}4m/s)^2}{(144+16^2)^{3/2}}=2{,}88x10^{-3}m/s^2$$

El piano tiene un movimiento acelerado porque el segmento $\overline{BC}$ de la cuerda va cambiando de dirección.

Respuesta:

a) v_P = 0,32m/s
b) $a_P = 2{,}88x10^{-3}m/s^2$

$\frac{dx}{dt} = V_c$

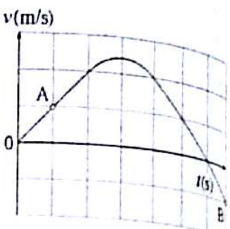
$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dt}$?

AB = H - y → y = H - AB
BC = √(H²+x²)

PE-3.08. *Gráfico de velocidad vs. tiempo*

El gráfico de la derecha muestra la *velocidad en función del tiempo* de un objeto moviéndose en línea recta. Respecto de los puntos A y B del gráfico, se puede decir que:

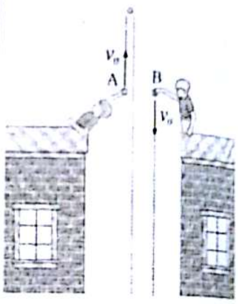
a) En el punto A el objeto va cuesta arriba
b) En A el objeto está moviéndose a 45° con el eje x.
c) En el punto B el objeto va cuesta abajo
d) En el punto B el objeto va por debajo del nivel de tierra
e) En B el objeto viaja en dirección opuesta que en A.



PE-3.09. *Lanzamientos hacia arriba y hacia abajo*

Desde una altura determinada y simultáneamente, se lanzan verticalmente dos pelotas. La pelota A se lanza hacia arriba con rapidez inicial v_0 y la pelota B se lanza hacia abajo con la misma rapidez inicial, v_0. Despreciando la resistencia del aire, se debe cumplir que:

a) La pelota A llega al suelo con mayor rapidez.
b) La pelota B llega al suelo con mayor rapidez.
c) Las dos pelotas llegan al suelo con igual rapidez.
d) Las dos pelotas llegan al suelo simultáneamente.



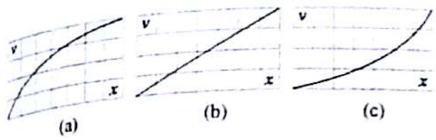
PE-3.10. *Mono peligroso en la mata de cocos*

Un mono está en una mata de cocos a una altura h = 19,6 m y en el preciso instante en que un turista va pasando por debajo de la mata, el mono deja caer un coco directamente a su cabeza. Si el turista llevaba una velocidad v = 1,5 m/s, ¿a qué distancia por detrás de él, chocó el coco con el suelo?

a) 0,50 m.
b) 1,5 m..
c) 2,0 m.
d) 2,5 m.
e) 3,0 m.

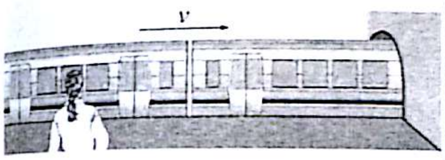
PE-3.11. *Gráfico de velocidad vs. posición*

Una estudiante en un trineo sobre la nieve, parte del reposo y se desliza sin fricción en una pendiente cuesta abajo en línea recta. ¿Cuál de los siguientes gráficos mejor representa la velocidad en función de la distancia x desde el punto de partida?



PE-3.12. *Tiempo que pasa el metro dentro del túnel*

Un tren de longitud L = 100 m se dirige a un túnel a velocidad constante v = 15 m/s.

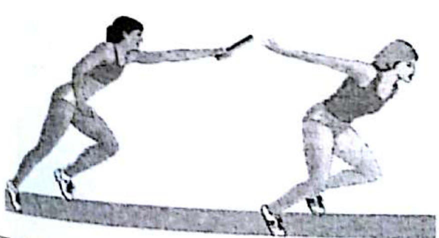


El túnel tiene 200 m de largo. Si en un instante dado el tren está entrando al túnel, después de cuanto tiempo habrá salido completamente?

a) 60 segundos
b) 45 segundos
c) 30 segundos
d) 20 segundos
e) 15 segundos

PE-3.13. *Carrera de relevo*

En la competencia de relevo de 800 metros planos de los juegos universitarios, la primera corredora cubrió los primeros 400 metros a una velocidad de 5 m/s.



Para poder alcanzar una velocidad promedio de 10 m/s, la segunda corredera tendría que correr en los 400 metros restantes a...

a) 12,5 m/s
b) 15 m/s
c) 20 m/s
d) 25 m/s
e) mayor velocidad que la luz.

PR-4.02. *¿Cuál será la ruta de la hormiga?*

Un hormiga parte del reposo desde un punto de coordenadas (x = 1 cm, y = 1 cm.) y se mueve con una aceleración:

$$\vec{a}(t) = 6t^2\,\hat{x} + 4t\,\hat{y} \quad \text{cm/s}^2$$

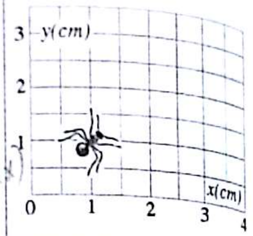
Donde el tiempo t está en segundos.

a) Determine su velocidad en función del tiempo.

b) Determine su posición en función del tiempo.

? c) Determine la trayectoria de la hormiga.

d) Grafique la trayectoria desde t = 0 s. hasta t = 2 s.



Solución; a) La componente x de la velocidad se obtiene a partir de la aceleración en esa dirección: $a_x = dv_x/dt$:

$$v_x = \int a_x dt = \int 6t^2 dt = 6\frac{t^3}{3} + c_1 = 2t^3$$

Velocidad inicial en t = 0:

$$v_x = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$

De manera similar, para la componente y de la velocidad:

$$v_y = \int a_y dt = \int 4t\,dt = 4\frac{t^2}{2} + c_2 = 2t^2 \text{ cm/s}$$

Velocidad inicial en t = 0:

$$v_y = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0$$

Por lo tanto, el vector velocidad es:

$$\vec{v}(t) = (2t^3\hat{x} + 2t^2\hat{y}) \text{ cm/s}$$

b) La coordenada x se obtiene a partir de la componente x de la velocidad, $v_x = dx/dt$:

Posición inicial en t = 0:

x = 1 cm $\Rightarrow$ c_3 = 1 cm

y = 1 cm $\Rightarrow$ c_4 = 1 cm

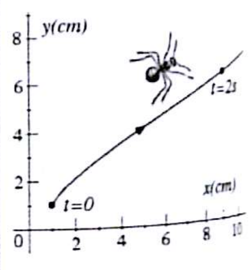
$$x = \int v_x dt = \int 2t^3 dt = 2\frac{t^4}{4} + c_3 = (\frac{t^4}{2} + 1) \text{ cm}$$

De manera similar se obtiene la coordenada y:

$$y = \int v_y dt = \int 2t^2 dt = 2\frac{t^3}{3} + c_4 = (\frac{2}{3}t^3 + 1) \text{ cm}$$

Por lo tanto, el vector posición es:

$$\vec{r}(t) = [(\frac{t^4}{2} + 1)\hat{x} + (\frac{2}{3}t^3 + 1)\hat{y}]$$



c) La ecuación de la trayectoria se obtiene expresando el tiempo en función de $x(t)$ y sustituyéndolo en la expresión para $y(t)$:

$$t = (2x - 2)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}(2x-2)^{3/4} + 1$$

Donde x e y están en centímetros.

d) En la gráfica de y vs x, hemos dibujado la ecuación de la trayectoria desde el instante t = 0 s, posición: (x = 1 cm; y = 1 cm) hasta el instante t = 2 s, posición: (x = 9 cm; y = 6,33 cm).

Respuesta

a) $\vec{v}(t) = (2t^3\hat{x} + 2t^2\hat{y})$ cm/s

b) $\vec{r}(t) = [(\frac{t^4}{2} + 1)\hat{x} + (\frac{2}{3}t^3 + 1)\hat{y}]$

c) $y = \frac{2}{3}(2x-2)^{3/4} + 1$

PR-4.03. *Esto lo dijo Galileo...*

En el libro de Galileo Galilei "Dos ciencias nuevas" el sabio afirma que:

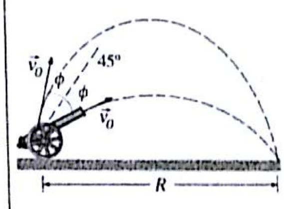
...Para elevaciones que excedan o no lleguen a 45° por cantidades iguales, los alcances horizontales son iguales......

Verifique esta aseveración.

Galileo Galilei (1564-1642)

Solución: Consideremos la expresión para el alcance horizontal de un proyectil que es lanzado con velocidad inicial v_0 a un ángulo θ con la horizontal:

$$R = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$



Cuando el ángulo de lanzamiento es: θ_1 = (45° + ϕ), el alcance es:

$$R_+ = \frac{v_0^2 sen(90° + 2\phi)}{g} = \frac{v_0^2 cos(2\phi)}{g}$$

Mientras que para un ángulo θ_2 = (45° - ϕ), el alcance es:

$$R_- = \frac{v_0^2 sen(90° - 2\phi)}{g} = \frac{v_0^2 cos(2\phi)}{g}$$

Las dos expresiones coinciden, por lo tanto el alcance horizontal de un proyectil con una rapidez inicial fija será igual para dos ángulos que cumplan la condición:

$$\theta_1 = (45° - \phi)$$

$$\theta_2 = (45° + \phi)$$

Respuesta

$$R_- = R_+ = \frac{v_0^2 cos(2\phi)}{g}$$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

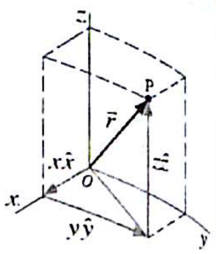
VECTOR POSICIÓN

La posición relativa de un objeto respecto de un marco de referencia queda especificada por el vector posición, o radio vector $\bar{r}$. Este se extiende desde el origen O, hasta el punto P representativo del objeto.

En un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) el vector posición es:

$$\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Donde ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) son los respectivos vectores unitarios.



VECTOR DESPLAZAMIENTO

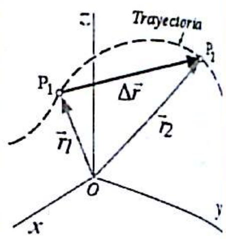
Durante un intervalo de tiempo Δt, el desplazamiento del objeto es la diferencia de los dos vectores de posición correspondientes:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

En coordenadas cartesianas, el vector desplazamiento tiene por componentes los desplazamientos sobre cada uno de los ejes.

$$\Delta\bar{r} = (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)\hat{z}$$

$$\Delta\bar{r} = \Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} + \Delta z\hat{z}$$

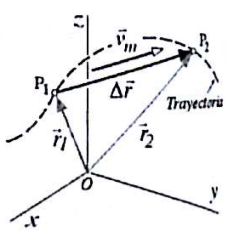


VELOCIDAD MEDIA

Se define el vector velocidad media durante intervalo de tiempo Δt, al cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

En coordenadas cartesianas la velocidad media tiene por componentes las velocidades sobre cada uno de los ejes.



VELOCIDAD INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo, Δt, tiende a cero:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

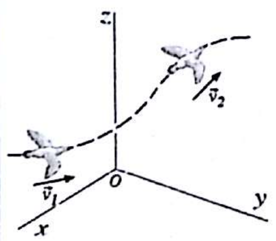
La velocidad instantánea es pues, la derivada del vector posición respecto del tiempo.

Si trabajamos en coordenadas cartesianas, las componentes del vector velocidad son:

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

El módulo de la velocidad instantánea es:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



La velocidad instantánea, $\bar{v}$ es tangente a la trayectoria

Componentes cartesianas

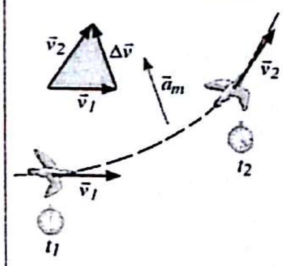
$$\bar{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

ACELERACIÓN MEDIA

El vector velocidad puede variar durante el movimiento. Se define el vector aceleración media, $\bar{a}_m$, como el cociente entre la variación del vector velocidad, $\Delta\bar{v}$ y el intervalo de tiempo Δt.

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

Observe que el vector aceleración media, $\bar{a}_m$, tiene la misma dirección y sentido del vector $\Delta\bar{v}$.



La aceleración tiene la misma dirección y sentido que el cambio instantáneo de velocidad

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Si consideramos un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se define el vector aceleración instantánea como la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

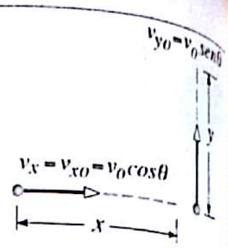
$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Podemos considerar el movimiento del proyectil como la superposición de dos movimientos independientes: 1) Un movimiento uniforme en la dirección x, y 2) Movimiento en la dirección vertical sometido a la aceleración de la gravedad hacia abajo, $\vec{a} = -g\hat{y}$.

Hemos elegido que el origen O de las coordenadas esté en el punto donde el proyectil sale disparado y el eje $y+$ vertical hacia arriba, escribimos las coordenadas (x, y) en el instante t:

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t \qquad (1)$$

$$y(t) = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$



Condiciones iniciales:

$$x_0 = y_0 = 0$$
$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{y0} = v_0 sen\theta$$

Trayectoria: La expresión de la trayectoria $y(x)$ se obtiene despejando el tiempo de la ecuación (1) y sustituyéndolo en la (2):

$$y(x) = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2$$

La curva que representa la ecuación de la trayectoria de un proyectil resulta ser una *parábola*.

Trayectoria: Parábola

$$y(x) = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2$$

Tiempo de vuelo: El tiempo total de vuelo se halla haciendo $y(t) = 0$:

$$0 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Tiempo de vuelo

$$t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Alcance horizontal: La distancia horizontal total recorrida durante el tiempo de vuelo t es:

$$R = v_{0x}t = v_0 \cos\theta\left(\frac{2v_0 sen\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$

Alcance horizontal

$$R = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$

Altura máxima: El punto máximo de la trayectoria $y = H$ es donde la componente vertical de la velocidad se anula:

$$v_{\hat{y}}^2 = v_{y0}^2 - 2gH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_{y0}^2}{2g} = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$$

Altura máxima

$$H = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-4.01. ***La ruta de un perro en busca de su hueso***

Un perro guiado por su olfato anda en busca del sitio donde enterró su hueso y sigue una ruta determinada por las coordenadas como funciones del tiempo:

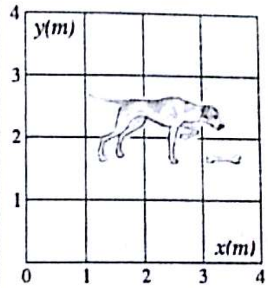
$$x(t) = 2t \qquad y(t) = 3 - t^2 \qquad (t > 0)$$

Donde x e y se miden en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál será la trayectoria del perro?

b) Halle su velocidad en función del tiempo.

c) ¿En que momento $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son ortogonales?



Solución: a) Para hallar la trayectoria del perro, se despeja el tiempo en función de x y se sustituye en $y(t)$.

$$y(x) = 3 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3 - \frac{x^2}{4}$$

b) El vector posición y el vector velocidad en función del tiempo son, respectivamente:

$$\vec{r}(t) = 2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}[2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}] = 2\hat{x} - 2t\hat{y} \text{ m/s}$$

c) Cuando $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ se debe cumplir, $\vec{v}(t) \bullet \vec{r}(t) = 0$:

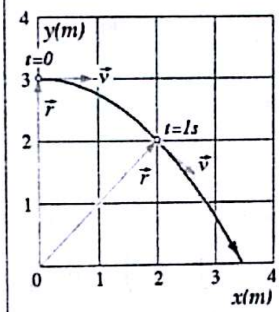
$$(2\hat{x} - 2t\hat{y}) \bullet [2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}] = 4t - 2(3 - t^2) = 0$$

$$2t^3 - 2t = 2t(t^2 - 1) = 0$$

Los instantes de tiempo son: $t = 0, +1s$. Los vectores de posición en esos instantes son:

$$\vec{r}(0) = 2(0)\hat{x} + (3 - 0)\hat{y} = 3\hat{y}$$

$$\vec{r}(1) = 2(1)\hat{x} + (3 - 1^2)\hat{y} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$$



Respuesta

a) $y(x) = 3 - \frac{x^2}{4}$

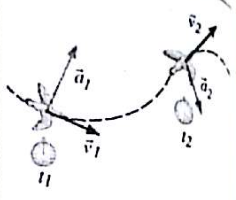
b) $\vec{v}(t) = 2\hat{x} - 2t\hat{y}$ m/s

c) $t = 0, +1s$

En coordenadas cartesianas cada componente del vector $\vec{a}(t)$ es la derivada de la correspondiente componente de $\vec{v}(t)$:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

El vector velocidad puede variar en módulo, en dirección o en ambos cosas. En cualquiera de estos casos, hay una aceleración. Cuando sólo varía el módulo de $\vec{v}$, el movimiento es rectilíneo. Un objeto puede tener el módulo de su velocidad, constante y sin embargo estar acelerado. Esto ocurre en el movimiento circular uniforme que estudiaremos en el próximo capítulo.



$\vec{v}$ es tangente a la trayectoria
$\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo

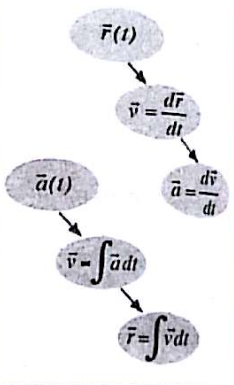
ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La función $\vec{r}(t)$ contiene toda la información acerca del movimiento. Si conocemos $\vec{r}(t)$, entonces podemos encontrar en forma directa, por derivación sucesiva, la velocidad, $\vec{v}$, y la aceleración, $\vec{a}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Inversamente, si conocemos la aceleración en funcion del tiempo, $\vec{a}(t)$, *y las condiciones iniciales*, podemos encontrar por integración sucesiva, la velocidad, $\vec{v}$, y la ley de movimiento $\vec{r}(t)$.

$$\vec{v} = \int \vec{a}(t)dt \qquad \vec{r} = \int \vec{v}(t)dt$$



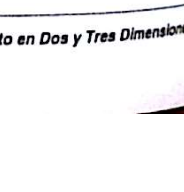
ACELERACIÓN CONSTANTE

Un caso de particular importancia es el de aceleración constante (tanto en módulo como en dirección). Si integramos la expresión: $d\vec{v} = \vec{a}dt$, se obtiene la velocidad $\vec{v}$, al cabo de un tiempo t:

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t$$

Donde $\vec{v}_0$ es la velocidad en el instante inicial $t = 0$.

De manera similar, si integramos la relación $d\vec{r} = \vec{v}dt$, y usamos la expresión anterior para $\vec{v}$ en términos de $\vec{a}$:



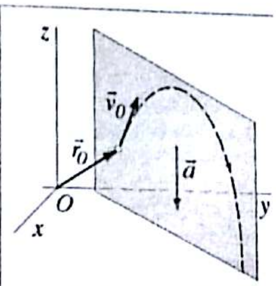
$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$$

Si $\vec{r}_0$ es el vector posición en el instante inicial, en cualquier instante tendremos:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

De acuerdo a esta expresión el desplazamiento, $(\vec{r} - \vec{r}_0)$, es una combinación de dos vectores: uno paralelo a $\vec{v}_0$ y el otro paralelo a $\vec{a}$. Por lo tanto, el movimiento en 3-D con aceleración constante está confinado al plano formado por los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$.



$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Si $\vec{a}$ es constante, el movimiento ocurre en un plano

Como tenemos libertad de elegir el sistema de coordenadas, para que la ecuación vectorial se reduzca a dos escalares, basta con hacer coincidir el plano x-y con el plano en que yace la trayectoria (plano formado por $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$). Obtenemos así las ecuaciones escalares para el movimiento en las direcciones x e y:

Los movimientos en las direcciones x e y son simultáneos pero independientes. Esto significa, por ejemplo, que el cambio en la posición x está determinado únicamente por la aceleración a_x y la velocidad inicial v_{ox}. Por lo tanto, las ecuaciones para cada componente son idénticas a las del movimiento uni-dimensional con aceleración constante. Este es un punto clave que facilitará la resolución de problemas.

Movimiento con $\vec{a}$ constante en coordenadas rectangulares

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un proyectil es cualquier objeto lanzado al aire y al que se le permite moverse libremente. Supongamos que un proyectil es lanzado con una velocidad inicial, $\vec{v}_0$, a un ángulo θ con la horizontal, en un terreno plano.

Superposición de dos movimientos: Horizontal y Vertical

PE 3.14. *La velocidad de la sombra.*

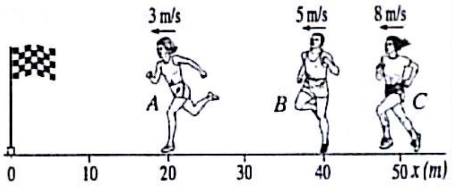
Una persona de altura h camina a lo largo de una acera, alejándose de un farol a velocidad constante, $v_O = 1$ m/s. Si el farol tiene una altura $3h$, la velocidad del punto P de la sombra de su cabeza proyectada sobre el piso será…..

a) 3,0 m/s, b) 2,5 m/s, c) 2,0 m/s.

d) 1,5 m/s, e) 1,0 m/s.

PE 3.15. *¿Cómo termina esta competencia?*

En una competencia, tres corredores van acercándose a la meta y, en un cierto instante, sus posiciones x (m) y sus velocidades v (m/s), son las indicadas en este gráfico:

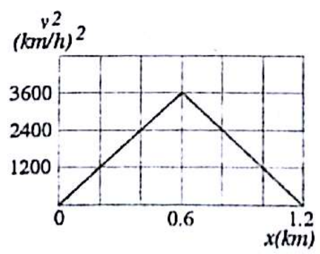


Si los corredores siguen con sus velocidades constantes, cuál será el orden de llegada?

	No. 1,	*No. 2,*	*No. 3*
a)	A	C	B
b)	C	A,	B
c)	B	A,	C
d)	A	B,	C
e)	C	B,	A

PE-3.16. *Tiempo de recorrido entre dos estaciones*

El gráfico mostrado de v^2 en función de x, corresponde al movimiento rectilíneo de un tren entre dos estaciones que están separadas por una distancia de 1,2 km.



El tiempo invertido durante este recorrido es….

a) 2,4 min,

b) 6 min,

c) 12 min,

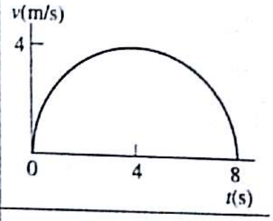
d) 30 min,

e) 60 min

PE-3.17. *Gráfica semi circular de velocidad vs. tiempo*

Un objeto se desplaza en línea recta de modo que la gráfica de su velocidad (m/s) en función del tiempo (s) es la indicada en la figura. ¿Cuál es la distancia (en metros) que ha recorrido en el intervalo de 8 segundos?

a) 2π. b) 4π c) 6π. d) 8π. e) 16π.

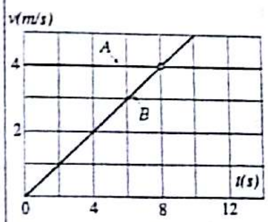


PE-3.18. *¿Cuando se volverán a encontrar?*

Dos objetos parten simultáneamente desde el mismo punto y viajan en línea recta en el mismo sentido. El móvil A viaja a velocidad constante de 4 m/s, mientras que el móvil B parte del reposo y su velocidad aumenta linealmente según indica la figura. ¿Al cabo de cuanto tiempo de haber partido alcanzará el móvil B al móvil A?

a) $t = 8$ s, b) $t = 12$ s, c) $t = 16$ s,

d) $t = 20$ s, e) $t = 24$ s



PE-3.19. *Relación entre las velocidades de los ferrys*

Dos ferrys salen simultáneamente y viajan en línea recta a velocidad constante, uno desde el puerto A con destino al puerto B y el otro desde el puerto B con destino a A. Los ferrys se cruzan en alta mar, y una hora después del encuentro, el ferry 1 llega a su destino, mientras que cuatro horas después del encuentro el ferry 2 llega a su destino.

¿Cómo están relacionadas las velocidades de los dos ferrys?

a) $\frac{v_1}{v_2} = 8$, b) $\frac{v_1}{v_2} = 6$,

c) $\frac{v_1}{v_2} = 4$ d) $\frac{v_1}{v_2} = 3$,

e) $\frac{v_1}{v_2} = 2$

PE-3.20. *¿A qué hora se cruzarán los trenes?*

Un tren tarda 4 horas en ir a velocidad constante desde la ciudad A hasta la ciudad B mientras que otro tren, tarda 6 horas en ir a velocidad constante desde B hasta A.

¿Si parten simultáneamente a las 12:00 del mediodía, a qué hora se encontrarán en el camino ?

a) A la 1:30 pm

b) A las 2:00 pm

c) A las 2:24 pm

d) A las 2:45 pm

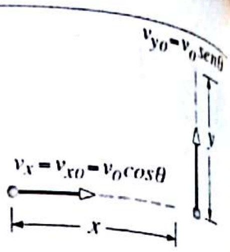
e) A las 3:00 pm

Podemos considerar el movimiento del proyectil como la superposición de dos movimientos independientes: 1) Un movimiento uniforme en la dirección x, y 2) Movimiento en la dirección vertical sometido a la aceleración de la gravedad hacia abajo, $\vec{a} = -g\hat{y}$.

Hemos elegido que el origen O de las coordenadas esté en el punto donde el proyectil sale disparado y el eje $y+$ vertical hacia arriba, escribimos las coordenadas (x, y) en el instante t:

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t \qquad (1)$$

$$y(t) = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$



Condiciones iniciales:

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{y0} = v_0 sen\theta$$

Trayectoria: La expresión de la trayectoria $y(x)$ se obtiene despejando el tiempo de la ecuación (1) y sustituyéndolo en la (2):

$$y(x) = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2$$

La curva que representa la ecuación de la trayectoria de un proyectil resulta ser una *parábola*.

Trayectoria: Parábola

$$y(x) = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2$$

Tiempo de vuelo: El tiempo total de vuelo se halla haciendo $y(t) = 0$:

$$0 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Tiempo de vuelo

$$t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

Alcance horizontal: La distancia horizontal total recorrida durante el tiempo de vuelo t es:

$$R = v_{0x}t = v_0 \cos\theta\left(\frac{2v_0 sen\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$

Alcance horizontal

$$R = \frac{v_0^2 sen 2\theta}{g}$$

Altura máxima: El punto máximo de la trayectoria $y = H$ es donde la componente vertical de la velocidad se anula:

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_{y0}^2}{2g} = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$$

Altura máxima

$$H = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-4.01. *La ruta de un perro en busca de su hueso*

Un perro guiado por su olfato anda en busca del sitio donde enterró su hueso y sigue una ruta determinada por las coordenadas como funciones del tiempo:

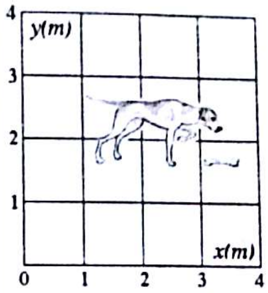
$$x(t) = 2t \qquad y(t) = 3 - t^2 \qquad (t > 0)$$

Donde x e y se miden en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál será la trayectoria del perro?

b) Halle su velocidad en función del tiempo.

d) ¿En que momento $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son ortogonales?



Solución: a) Para hallar la trayectoria del perro, se despeja el tiempo en función de x y se sustituye en $y(t)$.

$$y(x) = 3 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3 - \frac{x^2}{4}$$

b) El vector posición y el vector velocidad en función del tiempo son, respectivamente:

$$\vec{r}(t) = 2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}[2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}] = 2\hat{x} - 2t\hat{y} \text{ m/s}$$

c) Cuando $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ se debe cumplir, $\vec{v}(t) \bullet \vec{r}(t) = 0$:

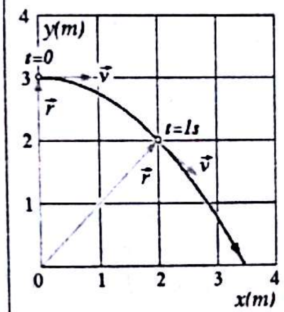
$$(2\hat{x} - 2t\hat{y}) \bullet [2t\hat{x} + (3 - t^2)\hat{y}] = 4t - 2(3 - t^2) = 0$$

$$2t^3 - 2t = 2t(t^2 - 1) = 0$$

Los instantes de tiempo son: $t = 0, +1s$. Los vectores de posición en esos instantes son:

$$\vec{r}(0) = 2(0)\hat{x} + (3 - 0)\hat{y} = 3\hat{y}$$

$$\vec{r}(1) = 2(1)\hat{x} + (3 - 1^2)\hat{y} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$$



Respuesta

a) $y(x) = 3 - \frac{x^2}{4}$

b) $\vec{v}(t) = 2\hat{x} - 2t\hat{y}$ m/s

c) $t = 0, +1s$

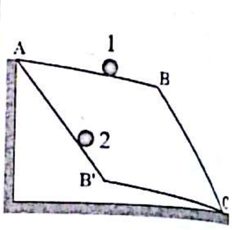
PE-3.21. *Te doy diez metros de ventaja*

Dos alumnas, Ana y Beatriz compiten en una carrera de 100 metros. Ana llega primero a la meta, dejando a Beatriz a 10 metros por detrás. Ana propone repetir la competencia, pero esta vez saliendo ella a 10 metros por detrás de la línea de partida. Suponiendo que ambas corren con la misma velocidad que antes, ¿quién ganará?

a) Ana vuelve a ganar.
b) Gana Beatriz.
c) Empatan la carrera.

PE-3.22. *¿Cuál de las dos pelotas llegará primero?*

Cuatro planos inclinados de igual longitud se colocan en forma de un rombo. Desde el punto superior A se sueltan dos pelotas simultáneamente, la pelota 1 por la pista superior ABC y la pelota 2 por la pista inferior AB'C. Cuando llegan al punto inferior C, podemos decir que...
a) La 1 llega primero y con igual velocidad que la 2.
b) La 1 llega primero y con mayor velocidad que la 2.
c) La 2 llega primero y con mayor velocidad que la 1.
d) La 2 llega primero y con igual velocidad que la 1.
e) Las dos llegan simultáneamente y con igual velocidad.



CAP. 3: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
3.01					✓
3.03		✓			
3.05		✓			
3.07	✓				
3.09			✓		
3.11	✓				
3.13					✓
3.15		✓			
3.17				✓	
3.19					✓
3.21	✓				

	a	b	c	d	e
3.02				✓	
3.04		✓			
3.06			✓		
3.08					✓
3.10					✓
3.12				✓	
3.14				✓	
3.16	✓				
3.18			✓		
3.20			✓		
3.22				✓	

4

MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Cuando estudiamos el movimiento rectilíneo hicimos hincapié en que tanto el desplazamiento, como la velocidad y la aceleración son magnitudes vectoriales. Sin embargo, el carácter vectorial no se hizo aparente salvo cuando asignamos un signo positivo o negativo para el sentido del vector correspondiente en una recta dada. Nuestro mundo real es tridimensional y para describir el movimiento en dos o tres dimensiones debemos tomar en cuenta que estas magnitudes físicas tienen necesariamente dirección y sentido en el espacio, además de su módulo. En este capítulo, como en el caso del movimiento unidimensional, analizaremos las ecuaciones vectoriales para el movimiento en dos y tres dimensiones partiendo de las definiciones de desplazamiento, velocidad y aceleración. Consideraremos el caso especial del movimiento con aceleración constante, el cual ocurre en un plano, y en particular el movimiento de proyectiles, cuya trayectoria parabólica resulta muy sencilla de analizar porque se aprovecha la ventaja de que los movimientos horizontal y vertical resultan independientes.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Vector de posición y vector desplazamiento.
- Vector velocidad promedio y velocidad instantánea
- Vector aceleración promedio y aceleración instantánea
- Movimiento tridimensional con aceleración constante.
- Movimiento de proyectiles.

$$1,5t^2 - 24t + 55,4 = 0$$

son:

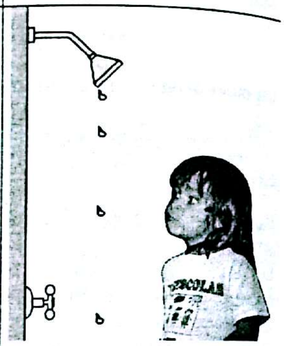
$$t = \frac{24,0 \pm \sqrt{24,0^2 - 4(1,50)(55,4)}}{2(1,50)} = \frac{24,0 \pm 15,6}{3,00} \begin{cases} t_L = 13,2\text{s} \\ t_4 = 2,80\text{s} \end{cases}$$

Se descarta el tiempo mayor ($t_L = 13,2$s) porque correspondería a un instante posterior en que el Jeep retornaría a esa posición moviéndose en retroceso. En conclusión, el choque ocurre en la posición $x = 55,4$ m y en el instante $t = 2,80$ s.

Respuesta:

$x = 55,4$m
$t = 2,80$ s.

PR-3.23. *La ducha que gotea*



Una ducha está a una altura de 2 m sobre el piso y una niña curiosa observa que se desprenden gotas a intervalos regulares de tiempo.

a) Si el intervalo entre gotas es 0,10 s, ¿qué distancia separa la primera gota de la segunda en el instante en que se desprende la séptima?

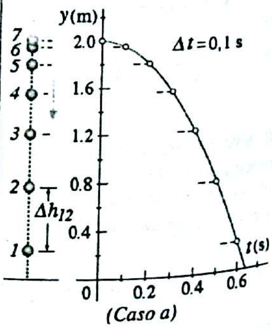
b) La niña aprieta un poco la llave y observa que una gota pega del piso, en el instante en que la cuarta gota se desprende de la ducha, ¿a qué altura están la segunda y la tercera gota en ese instante?

Solución: Si tomamos el origen $y = 0$ en el piso, las condiciones iniciales son:

$$y_0 = h, \quad v_0 = 0, \quad a = -g$$

Si Δt es el intervalo entre gotas, en el instante en que se desprende la séptima gota, ya la gota No. 1 ha estado en el aire durante un tiempo $6\Delta t$ y está a una altura:

$$y_1 = h - \frac{1}{2}g(6\Delta t)^2 = 2 - \frac{1}{2}(9,8)(36)(0.1)^2 = 0,236\text{m}$$



(Caso a)

Mientras que la gota No. 2 está a una altura:

$$y_2 = h - \frac{1}{2}g(5\Delta t)^2 = 2 - \frac{1}{2}(9,8)(25)(0.1)^2 = 0,775\text{m}$$

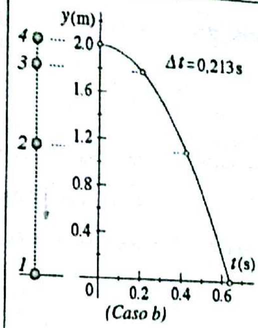
y la distancia entre ellas es:

$$\Delta h_{12} = y_2 - y_1 = 0,775\text{m} - 0,236\text{m} = 0,539\text{m}$$

b) Si la gota No. 1 pega del piso, en el instante en que la gota No. 4 se desprende de la ducha, entonces el nuevo intervalo Δt entre gotas viene dado por:

$$y_1 = 0 = h - \frac{1}{2}g(3\Delta t)^2$$

$$\Delta t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(2\text{m})}{9,8\text{m/s}^2}} = 0,213\text{s}$$



(Caso b)

Las gotas No. 2 y No. 3 estarán a las alturas respectivas:

$$y_2 = h - \frac{1}{2}g(2\Delta t)^2 = 2 - \frac{1}{2}(9,8)(4)(0.213)^2 = 1,11\text{m}$$

$$y_3 = h - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 2 - \frac{1}{2}(9,8)(0.213)^2 = 1,78\text{m}$$

Respuesta

a) $\Delta h_{12} = 0,539$m
b) $y_2 = 1,11$m, $y_3 = 1,78$m

PR-3.24. *El bombillo que se desprende del ascensor*

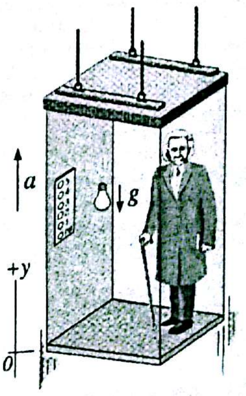
Un ascensor sube con una aceleración de 0,20 m/s^2. En el instante en que su velocidad es 2,50 m/s, se desprende un bombillo desde el techo, que está a 2,0 m sobre su piso. Determine:

a) El tiempo de caída del bombillo desde el techo hasta el piso.

b) La distancia que cayó el bombillo en ese tiempo.

Solución: a) Tomemos un marco de referencia fijo afuera del ascensor con el origen a la altura al nivel del piso del ascensor en el momento ($t = 0$) en que se desprende el bombillo, y la coordenada y positiva hacia arriba. Para el ascensor las condiciones iniciales en el momento de desprenderse el bombillo son:

Ascensor en $t = 0$: $y_0 = 0$, $v_0 = 2,5$ m/s, $a_y = 0,2$ m/s^2



La ecuación de movimiento del piso del ascensor es:

$$y_a = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 2,5t + 0,1t^2$$

Para el bombillo las condiciones iniciales en el momento de desprenderse son:

Bombillo en $t = 0$: $y_0 = 2$m y $v_0 = 2,5$m/s, $a_y = -9,8$ m/s^2.

La ecuación de movimiento del bombillo es:

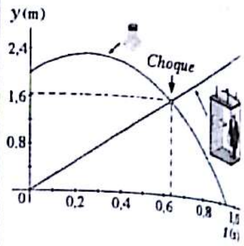
$$y_b = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 2 + 2,5t - 4,9t^2$$

Cuando el bombillo choca contra el piso del ascensor las coordenadas de ambos son iguales: $y_b = y_a$, entonces:

$$2 + 2,5t - 4,9t^2 = 2,5t + 0,1t^2$$

Simplificando y despejando se obtiene el tiempo:

$$5t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{2,50}} = 0,632s$$



b) En el gráfico de la derecha se muestran las posiciones del bombillo y del ascensor en el transcurso del tiempo. En el instante del choque, el piso del ascensor ha subido una altura:

$$y_a = v_0 t + \frac{1}{2}at = 2,5(0,632s) + 0,1(0,632s)^2 = 1,62m$$

Por lo tanto la distancia que habrá caído el bombillo es:

$$d = 2,00 \text{ m} - 1,62 \text{ m} = 0,38 \text{ m} = 38 \text{ cm.}$$

Respuesta:

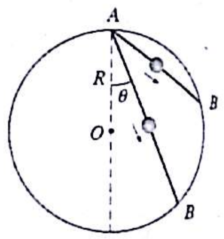
a) $t = 0,632s$
b) $d = 38$ cm.

PR-3.25. ***Igual tiempo de viaje en las distintas cuerdas***

Dos esferitas parten simultáneamente desde un punto A situado en el extremo superior del diámetro vertical de una circunferencia de radio R, y se deslizan sin fricción por alambres rectos a lo largo de cuerdas distintas.

a) Determine la velocidad de cada esferita al llegar al otro punto de la circunferencia, en función del ángulo θ de inclinación de la cuerda respecto de la vertical.

b) Demuestre que el tiempo de viaje es el mismo para cualquier cuerda.



Solución: a) Para cada una de las pistas, la aceleración de la esferita es constante, $a = g\cos\theta$ y la longitud de la cuerda es: $L = 2R\cos\theta$. Partiendo del reposo en A, la velocidad final al legar al extremo de la cuerda es:

$$v^2 = 0^2 + 2aL = 2(g\cos\theta)(2R\cos\theta)$$

$$v = 2\cos\theta\sqrt{gR}$$

b) El tiempo de viaje entre A y B es:

$$L = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2(2R\cos\theta)}{g\cos\theta}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Se observa que, las velocidades de llegada disminuyen con el ángulo θ, pero los tiempos de viaje son iguales.

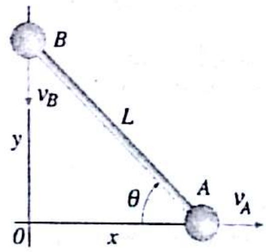
Respuesta

a) $v = 2\cos\theta\sqrt{gR}$
b) $t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$, no depende de θ

PR-3.26. ***Dos pelotas y un vínculo***

Dos pelotas están conectadas mediante una barra rígida de longitud L. Las pelotas pueden deslizar a lo largo de guías perpendiculares entre sí. ¿Si la pelota A se mueve hacia la derecha con velocidad v_A, cuál será la velocidad de la pelota B en el instante en que la barra forma un ángulo θ respecto a la horizontal?

Solución: En cierto instante durante el movimiento, sean x e y las distancias desde el origen O hasta las pelotas A y B, respectivamente. Considerando el triángulo rectángulo de catetos x e y (ver figura), tenemos:



$$x^2 + y^2 = L^2$$

Por ser L constante, si derivando ambos miembros de esta expresión respecto del tiempo, tenemos:

$$2x(\frac{dx}{dt}) + 2y(\frac{dy}{dt}) = 0$$

Pero estas derivadas son justamente las velocidades de las pelotas: $dx/dt = v_A$ (horizontal) y $dy/dt = v_B$ (vertical). Por lo tanto:

$$2xv_A + 2yv_B = 0$$

Despejando v_B:

$$v_B = -\frac{x}{y}v_A = -ctg\theta v_A$$

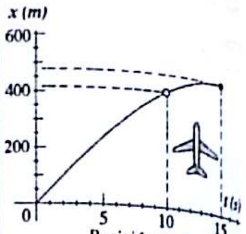
Respuesta:

$v_B = -ctg\theta v_A$

PR-3.27. ***Mayor acercamiento entre el carro y el camión***

Dos carreteras rectas se cruzan formando un ángulo recto y un carro y un camión se dirigen hacia ese cruce. En un cierto momento el carro está a 40 km del cruce y viajando con una velocidad de 48 km/h, mientras que el camión está a 50 km del cruce y viajando a 36 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo el carro y el camión se encuentran a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia?

$$x(10)=50(10)-\frac{(10)^3}{12}=417\text{m}$$



Posición vs. tiempo

En la segunda etapa de frenado ($t > 10$s) la aceleración es constante $a = dv/dt = -5\text{m/s}^2$, y la velocidad es:

$$\int_{10}^{v(t)} dv = v(t)-v(10)=\int_{10}^{t}(-5)dt=-5(t-10)$$

$$v(t)=v(10)-5(t-10)=75-5t$$

La distancia se halla de: $v = dx/dt = 75-5t$:

$$\int_{417}^{x} dx = x-417=\int_{10}^{t}(75-5t)dt=(75t-5\frac{t^2}{2})\Big|_{10}^{t}$$

$$x=417+(75t-5\frac{t^2}{2})\Big|_{10}^{15}=417+(75t-5\frac{t^2}{2})\Big|_{10}^{15}=479{,}5\text{m}$$

En el instante en que se logra detener la avioneta, habría recorrido una distancia: 479,5m. Es decir, faltando solo medio metro para llegar al barranco.

Respuesta:

Se detiene a medio metro del precipicio: $\Delta x = 479{,}5$m

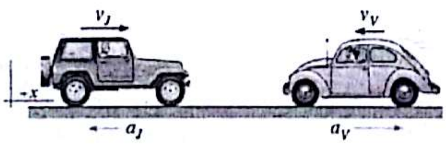
PR-3.22. *Hay soluciones matemáticas sin sentido físico*

Un Jeep y un Volkswagen se aproximan en una carretera recta muy estrecha. El Jeep se mueve a 24 m/s y el VW se mueve a 12 m/s. Cuando están separados por una distancia de 67,4 m ambos conductores aplican los frenos.

La deceleración del Jeep es 3 m/s² y la del VW es 6 m/s².

a) ¿Chocarán los carros?

b) En caso afirmativo, ¿cuándo y dónde ocurre el choque?



Solución: Escogemos el origen en la posición inicial del Jeep y el eje x positivo en el mismo sentido de su velocidad (Fig. a). Las condiciones iniciales son:

Jeep:	$x_o = 0$,	$v_o = +24$ m/s,	$a = -3$ m/s²
VW:	$x_o = +67{,}4$ m,	$v_o = -12$ m/s,	$a = +6$ m/s²

Aplicamos a cada carro las ecuaciones de cinemática para aceleración constante:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Los carros chocan cuando se cumple: $x_J = x_V$:

$$0 + 24t - \frac{1}{2}3t^2 = 67{,}4 - 12t + \frac{1}{2}6t^2$$

Simplificando la ecuación se tiene:

$$4{,}5t^2 - 36t + 67{,}4 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$t=\frac{36{,}0\pm\sqrt{36{,}0^2-4(4{,}50)(67{,}4)}}{2(4{,}50)}=\frac{36{,}0\pm 9{,}10}{9{,}00}$$

Raíces: $t_- = 2{,}99$s $\quad t_+ = 5{,}01$s

Los dos puntos correspondientes A y B están indicados en el *gráfico a* y se observa que ninguna de las dos soluciones tiene sentido físico, porque los choques ocurrirían en instantes en que *el VW estuviese en marcha hacia atrás después de haberse detenido.*

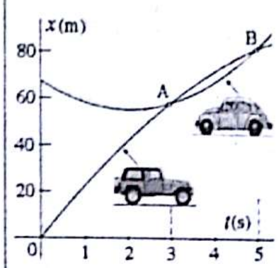
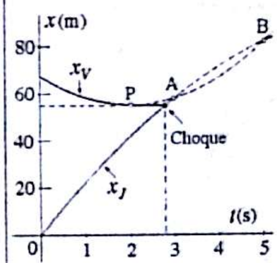


Gráfico a

¿Cómo hallar la solución? En esta situación, el VW se detiene a esperar el golpe, y debemos hallar el punto P donde esto ocurre ($v = 0$), como se ilustra gráfico. b:

Volkswagen: $\quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 0$

$$x = x_0 - \frac{v_0^2}{2a} = 67{,}4 - \frac{12{,}0^2}{2(6{,}00)} = 55{,}4\text{m}$$



(Gráfico b)

El VW permanecerá detenido en esta posición hasta el momento del choque. El tiempo en que ocurre el choque se obtiene de la condición $x_J = x_V = 55{,}4$ m. El Jeep alcanza esta distancia cuando se cumple:

$$x_J = 0 + 24t - \frac{1}{2}3t^2 = 55{,}4$$

Las raíces de la ecuación:

Esto significa que una pelota debe estar en la cima en el momento de recibir la anterior y lanzar la siguiente. Cada pelota tarda 0,5 s en llegar al punto máximo y allí la componente vertical de la velocidad se anula. Por lo tanto, la componente vertical de la velocidad inicial es:

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_{y0} - gt = 0 \;\; = 0$$

$$v_{y0} = gt = (9{,}80\text{m/s}^2)(0{,}50\text{s}) = 4{,}90\text{m/s}$$

Condiciones iniciales:

Posición: $y_0 = x_0 = 0$

Velocidad: $v_{xo},\ v_{yo}$

Aceleración: $a_y = -g$

b) Si se desea realizar el acto con cuatro pelotas, el tiempo para completar un ciclo es 4x0,5 s = 2 s; de los cuales durante 0,5 s, están en las manos. Cada pelota debe estar en el aire por el tiempo total de 1,5 s y como el tiempo de subida y de bajada es el mismo, el tiempo para alcanzar la altura máxima es 0,75 s.

La altura máxima alcanzada será:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$H = (gt)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\text{m/s}^2)(0{,}75\text{s})^2 = 2{,}76\text{m}$$

c) Si la altura del techo es H = 5 m, el tiempo de subida de una pelota estaría limitado a:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(5{,}0\text{m})}{9{,}80\text{m/s}^2}} = 1.01\text{s}$$

Si se desea manipular pelotas, el tiempo total para completar un ciclo es Nx0,5 s. La pelota pasa en las manos 0,5 s y el resto del tiempo: Nx0,5 s - 0,5 s = (N - 1)0,5 s, en el aire. Este tiempo en el aire no debe exceder el tiempo límite de subida + bajada (= 2x1,01 s). Por lo tanto:

$$(N-1)0{,}5\text{s} \le 2\text{x}1{,}01\text{s}$$

$$N - 1 \le \frac{2(1.01\text{s})}{0{,}50\text{s}} = 4{,}04 \quad \Rightarrow \quad N \le 5{,}04$$

Por lo tanto, el número máximo de pelotas que puede mantener en el aire es N = 5.

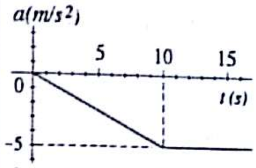
Respuesta

a) v_{yo} = 4,9 m/s
b) H = 2,76 m
c) Máximo: 5 pelotas

PR-3.21. *Aterrizaje de emergencia*

Una avioneta aterriza de emergencia sobre un terreno plano con una velocidad inicial v_o = 180 km/h (50 m/s), pero hay un precipicio a 480 m del punto de contacto.

El piloto aplica gradualmente los frenos, obteniendo la deceleración que varía con el tiempo en la forma indicada en el gráfico:



¿Logrará detener la avioneta antes del final de la pista?

Solución: Dividimos el movimiento de la avioneta en dos etapas. En la primera etapa, la aceleración varía con el tiempo:

$$\text{Para: } 0 < t < 10\text{s:} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}t = \text{ m/s}^2$$

La velocidad en función del tiempo se halla integrando:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = v(t) - v_0 = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t (-\frac{1}{2}t)dt = -\frac{t^2}{4}\Big|_0^t = -\frac{t^2}{4}$$

$$v(t) = v_0 - \frac{t^2}{4} = (50 - \frac{t^2}{4}) \text{ m/s}$$

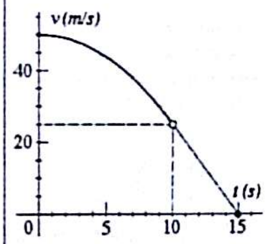
A partir de la velocidad $v(t) = dx/dt$, hallamos la posición en función del tiempo:

$$\int_0^{x(t)} dx = x(t) - 0 = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (50 - \frac{t^2}{4})dt$$

$$x(t) = 50t - \frac{t^3}{12}\Big|_0^t = (50t - \frac{t^3}{12}) \text{ m}$$

El instante t = 10 s, la velocidad y la posición de la avioneta son respectivamente:

$$v(10) = (50 - \frac{10^2}{4}) = 25 \text{ m/s}$$

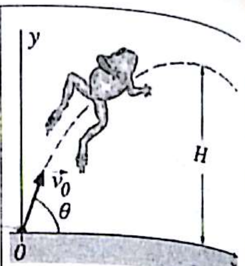


Velocidad vs. tiempo

PR-4.04. ***¿Por qué la rana salta a 45°?***

Se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ a un ángulo θ con la horizontal.

a) ¿Cuál será la altura máxima alcanzada, H?
b) ¿Dado v_o, cuál ángulo produce la mayor altura H?
c) ¿Cuál será su alcance horizontal R?
d) ¿Dado v_o, cuál ángulo produce el mayor alcance R?
e) ¿Por qué una rana salta a un ángulo cercano a 45°?



Solución: a) Se elige el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento y la dirección +y en la vertical hacia arriba. La aceleración es: $a_y = -g$. La componente vertical de la velocidad es:

$$v_y = v_{yo} + a_y t = v_0 sen\theta - gt$$

Condiciones iniciales:
$y_o = 0 \qquad v_{yo} = v_o sen\theta$

Como en la cima se anula v_y, si igualamos a cero la expresión anterior, se obtiene el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima:

$$t_m = \frac{v_0 sen\theta}{g}$$

Este tiempo es la mitad del que emplea en llegar de nuevo a $y = 0$, ya que el tiempo de subida es igual al de bajada. Al sustituir t_m en la expresión para la posición vertical:

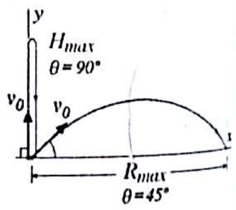
$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Obtenemos la altura máxima, H:

$$H = v_0 sen\theta(\frac{v_0 sen\theta}{g}) - \frac{1}{2}g(\frac{v_0 sen\theta}{g})^2 = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$$

b) Si fijamos v_o y se varía el ángulo θ, el máximo valor de H ocurre cuando $sen\theta = 1$ o sea, $\theta = 90°$ (lanzamiento vertical).

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$



c) Para hallar el alcance horizontal, primero determinaremos el tiempo en el cual el proyectil regresa a su elevación inicial ($y = 0$).

$$y = (v_0 sen\theta)t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2(v_0 sen\theta - \frac{1}{2}gt_2) = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son: $t_2 = 0$ (el instante del lanzamiento) y el tiempo buscado, $t_2 = 2v_0 sen\theta / g$. El alcance horizontal será el valor de x en ese tiempo:

$$R = v_x t_2 = (v_0 \cos\theta)(\frac{2v_0 sen\theta}{g}) = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g}$$

d) Si fijamos v_o y se variamos el ángulo θ, el máximo valor del alcance se obtiene cuando: $sen2\theta = 1$ o $\theta = 45°$.

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

e) Se observa que el ángulo de salto de una rana es cerca de 45°. Este comportamiento innato la ayuda a cubrir la máxima distancia sobre una superficie plana.

Respuesta

a) $H = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$

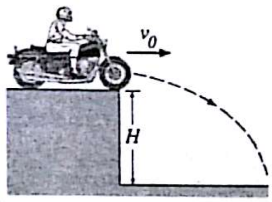
$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$, Para $\theta = 90°$

b) $R = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g}$

$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$, Para $\theta = 45°$

PR-4.05. ***¡Es injusto: Tengo el resultado bueno, pero el profesor me puso cero!***

Una moto se desplaza por una carretera horizontal con una velocidad v_o y al llegar a un precipicio, cae al vacío por un acantilado de altura H. ¿Cuál será la velocidad de la moto al llegar al suelo?



Solución: Un alumno resolvió este problema en dos líneas, y esto fue lo que escribió en su hoja de examen: "Como tengo la velocidad inicial v_o, la distancia recorrida, $y - y_o = H$ y la aceleración $a = g$, sustituyo estos datos en la expresión:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

y así obtengo directamente la velocidad final:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Este resultado para el módulo de la velocidad final es absolutamente *correcto*.

Sin embargo, el procedimiento *empleado no fue correcto*, ya que el alumno aplicó la ecuación para el movimiento rectilíneo en dirección vertical, y el v_o dado aquí no guarda ninguna relación con dicho movimiento. Además, ¿cuál es la dirección del vector velocidad, $\vec{v}$?

Un procedimiento correcto: Elegimos el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento y el eje $+y$ hacia abajo. Cuando la moto llega al suelo ($y = +H$), la componente vertical de su velocidad, v_y, viene dada por:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = 2gH$$

$$v_y = \sqrt{2gH}$$

Por otra parte, en el movimiento "horizontal" la velocidad se mantiene constante, $v_x = v_o$. La velocidad final $\vec{v}$ será la suma vectorial de estas dos componentes:

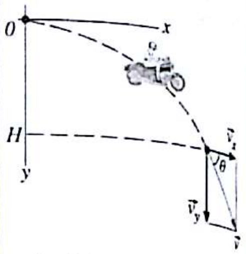
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Los tres vectores $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ y $\vec{v}$ forman un triángulo rectángulo, según se ilustra en la figura. El módulo de $\vec{v}$ es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Observe que el resultado obtenido por el estudiante en forma incorrecta coincide (por pura casualidad) con esta expresión. Finalmente, la dirección del vector $\vec{v}$ está dada por:

$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0}$$



Condiciones iniciales:

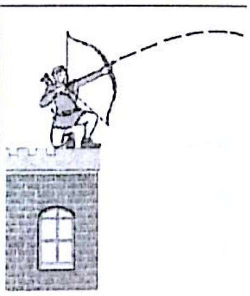
$x_o = 0,\ v_{ox} = v_o$
$y_o = 0,\ v_{oy} = 0$
$a_x = 0,\ a_y = +g$

Respuesta

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \quad tg\theta = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0}}$$

PR-4.06. *La rapidez de llegada no depende del ángulo de lanzamiento*

Desde la parte superior de una torre de altura H se lanzan flechas con idéntica rapidez inicial v_o. Una flecha se lanza hacia arriba con un ángulo θ respecto de la horizontal. Otra flecha se lanza hacia abajo con ángulo ϕ respecto de la horizontal. Demuestre que ambas flechas chocan contra el suelo con la misma rapidez y calcule el valor de ésta en función de la altura H.



Solución: Consideremos la flecha que es lanzada a un ángulo θ con rapidez inicial v_o. Si elegimos el origen en el punto de lanzamiento y el eje $+y$ hacia arriba, la aceleración es: $a_y = -g$ y las coordenadas iniciales son: $x_o = y_o = 0$.

En el punto de llegada ($y = -H$), las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta \quad \Rightarrow \quad v_x^2 = v_0^2 cos^2\theta \qquad (1)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_0^2 sen^2\theta + 2gH \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

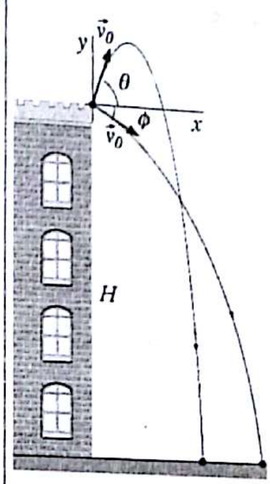
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 cos^2\theta + v_0^2 sen^2\theta + 2gH$$

$$v^2 = v_0^2(cos^2\theta + sen^2\theta) + 2gH = v_0^2 + 2gH$$

La rapidez final es:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Se concluye que la rapidez final depende de la rapidez inicial v_o y de la altura de caída H pero no depende del ángulo de lanzamiento, θ.



Respuesta

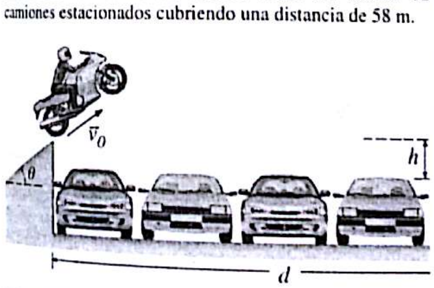
$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}}$$
v no depende de θ

PR-4.07. *Salto en moto sobre una hilera de carros*

El record de salto en moto por una rampa fue batido por Fiona Beale el 14/8/1997 en Derby, England. Ella se lanzó con una Kawasaki KX500 sobre una fila de 12 camiones estacionados cubriendo una distancia de 58 m.

Suponga una rampa que tiene una inclinación $\theta = 45°$, y la altura inicial de la moto, por encima del techo de los carros al abandonar la rampa, es $h = 2$ m. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial mínima v_0, para cubrir la distancia $d = 58$ m?

(Se desprecian las dimensiones de la moto)



$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 \qquad -2 = +8t - \frac{1}{2}(9{,}80)t^2$$

Por lo tanto:

$$4{,}9t^2 - 8t - 2 = 0$$

$$t = \frac{8{,}0 \pm \sqrt{8^2 + 4(4{,}9)(2)}}{2(4{,}9)} = \frac{8{,}00 \pm 10{,}2}{9{,}80}$$

El tiempo $t = +1{,}85$ s es el que ha transcurrido desde que la pelota sale de la mano hasta que golpea al piso. ¿Cuál sería el significado de la raíz negativa -0,22 s?.

b) La distancia horizontal desde el origen de coordenadas hasta el punto de impacto en el piso es:

$$x = v_{0x}t = (8{,}0\text{m/s})(1{,}85\text{s}) = 14{,}8\text{m}$$

El punto donde golpea la pelota al piso queda a una distancia desde la pared:

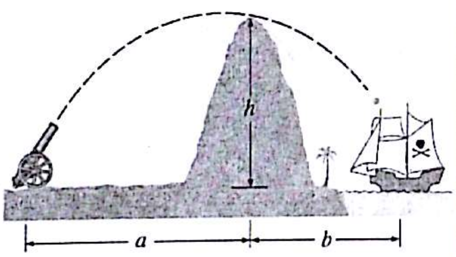
$$D = x - d = 14{,}8\text{m} - 4{,}80\text{m} = 10{,}0\text{m}$$

Solución:

a) $t = 1{,}85$ s
b) $D = 10$ m

PR-4.17. *Hay que combatir la piratería*

Un barco pirata se esconde detrás de una montaña para ponerse fuera del alcance de los cañones.



La montaña tiene una de altura, $h = 1000$ m, y el cañón atacante está a una distancia horizontal, $a = 1200$ m, de la línea vertical que pasa por el cima; mientras que el barco pirata está a una distancia, $b = 600$ m, respecto a la misma vertical. Determine el módulo de la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento para que el proyectil pegue en el barco, después de pasar rasante por la montaña.

Solución: Eligiendo el origen 0 en el punto de disparo, las ecuaciones de movimiento son:

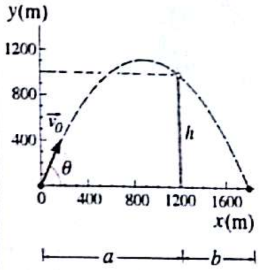
$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta)t$$

$$y = v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando el tiempo de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene la ecuación general de la trayectoria:

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{x}{v_0 \operatorname{sen}\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \operatorname{sen}\theta}\right)^2$$

$$y = x\,tg\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 = x\,tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\theta) \quad (1)$$



Como la trayectoria tiene que terminar en el blanco, se requiere que $y = 0$ para $x = a + b$:

$$0 = (a+b)tg\theta - \frac{g(a+b)^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\theta)$$

Despejando, se obtiene v_0:

$$v_0^2 = \frac{g(a+b)(1+tg^2\theta)}{2tg\theta} \qquad (2)$$

Roger Ivdez12

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) se obtiene la expresión general de la trayectoria:

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right)tg\theta$$

Si el proyectil debe pasar rasante por la cima de la montaña, punto (a, h), se cumple:

$$h = a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)tg\theta = \left(\frac{ab}{a+b}\right)tg\theta$$

Despejando, se obtiene el ángulo de lanzamiento:

$$tg\theta = \frac{h(a+b)}{ab} = \frac{1000\text{m}(1200\text{m} + 600\text{m})}{(1200\text{m})(600\text{m})} = 2{,}5$$

Sustituyendo este valor en la expresión de la velocidad se obtiene:

$$v_0^2 = \frac{9{,}8(1200 + 600)(1 + 2{,}5^2)}{2(2{,}5)} = 25578\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_0 = 160\text{m/s}$$

Solución:

a) $\theta = 68{,}2°$
b) $v_0 = 160$m/s

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{15,0-5,00}{9,80} = 1,02s$$

c) La distancia horizontal del punto en que ocurre el impacto es:

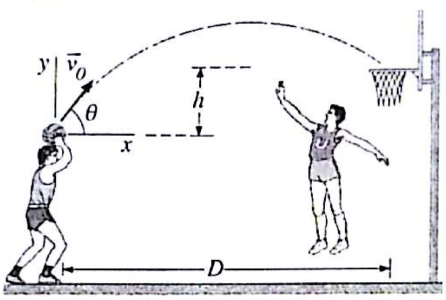
$$x = v_{0x}t = (8,66m/s)(1,02s) = 8,84m$$

Respuesta:

a) $v_x = 8,66$ m/s $v_y = 15$ m/s
b) $t = 1,02$s
c) $x = 8,84$m

PR-4.15. *Afinando la puntería para encestar el balón*

Un jugador lanza el balón a un ángulo θ = 57° con respecto a la horizontal.



El centro del aro de la cesta está ubicado a una distancia horizontal D = 4 m y a una altura h = 1,0 m por encima del punto de lanzamiento.

¿A qué rapidez inicial deberá el jugador lanzar el balón de manera que éste entre directamente en el aro?

Solución: Elegimos el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento y el eje vertical con sentido positivo hacia arriba. Las ecuaciones de movimiento son:

$$x = v_{0x}t = (v_0 cos\theta)t$$

$$y = v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando el tiempo de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene la ecuación general de la trayectoria:

$$y = (v_0 sen\theta)(\frac{x}{v_0 sen\theta}) - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 sen\theta})^2$$

$$y(x) = xtg\theta - (\frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta})x^2$$

Cuando el balón llega a la cesta se cumple, $x = D$, $y = h$:

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 cos\theta$
$y_0 = 0$, $v_{y0} = v_0 sen\theta$
$a_y = -g$

$$h = Dtg\theta - (\frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta})D^2$$

Despejando v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gD}{2cos^2\theta(tg\theta - h/D)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{(9,80m/s^2)(4,00m)}{2cos^2 57°(tg57° - 1,00m/4,00m)}} = 7,16m/s$$

Respuesta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gD}{2cos^2\theta(tg\theta - \frac{h}{D})}} = 7,16m/s$$

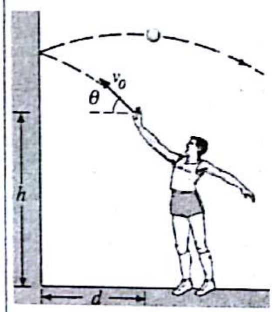
PR-4.16. *Pelota vasca: Iñaki Berroetigoechea vs Xavier Zubietxebarrieta*

Un jugador de pelota vasca golpea la pelota a una altura h = 2 m, por encima del piso, y esta sale con una velocidad inicial:

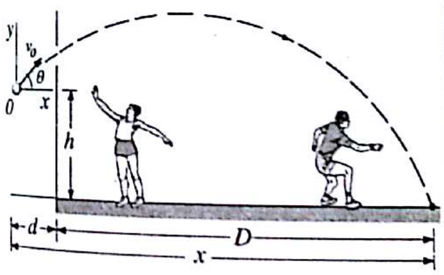
$$\vec{v}_0 = (-8\hat{x} + 8\hat{y})\ m/s$$

La pelota choca elásticamente contra la pared que está a una distancia horizontal d = 4,8 m, y en el rebote se invierte la componente horizontal de la velocidad, mientras que la componente vertical no varía.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará la pelota al piso?
b) ¿A qué distancia de la pared caerá la pelota?



Solución: a) Como la pelota rebota de la pared a un ángulo igual al de incidencia respecto de la horizontal, a los efectos de su trayectoria equivale a haber sido lanzada desde un punto *virtual* ubicado detrás de la pared, a distancia d de la misma y a una altura h.



Se elige el origen de coordenadas en el punto virtual de lanzamiento. Para el movimiento vertical, tomando en cuenta que el punto de llegada es (y = $-h$ = -2 m), se tiene:

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$, $v_{x0} = +8$ m/s
$y_0 = 0$, $v_{y0} = +8$ m/s

$a_y = -9,8$ m/s²

$$sen\theta = \frac{gt}{2v_0} = \frac{(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}5)}{2(400\text{m/s})} = 6{,}13\text{x}10^{-3}$$

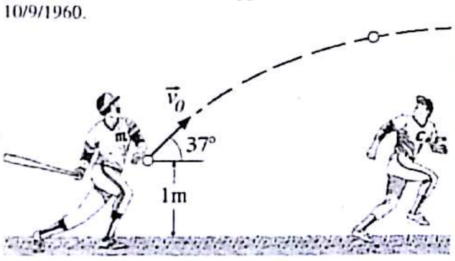
Para pegar en el blanco, el ángulo de elevación del proyectil debe ser: $\theta = 0{,}351°$.

Respuesta:

a) 1,23 m debajo del blanco
b) Angulo: $\theta = 0{,}351°$

PR-4.09. *El batazo de jonrón*

El batazo de jonrón mas largo registrado en las ligas mayores fue de 193 m por el famoso Mickey Mantle jugando con los Yankees de New York contra los Tigres de Detroit en el estadium Briggs de Detroit, Michigan el 10/9/1960.

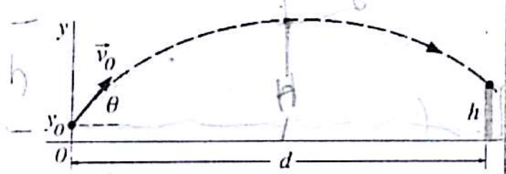


Suponga que en un partido de béisbol del Magallanes contra el Caracas, un bateador golpea la pelota a 1 m arriba del suelo y ésta sale formando un ángulo de 37° con la horizontal. La pelota se eleva de tal modo que pasa justo por encima de la pared límite del estadio, de 20 m de altura y localizada a 120 m de la línea de bateo.

a) ¿Cuál era velocidad inicial de la pelota?

b) ¿En que instante la pelota pasó por encima de la pared?

Solución: a) Escogemos el origen en el pie del bateador y el eje vertical con sentido positivo hacia arriba.



Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$, $\quad v_{x0} = v_0 cos\theta$

$y_0 = 1\text{m}$, $v_{y0} = v_0 sen\theta$

$\theta = 37°$

$a_y = -g = -9{,}8\text{m/s}^2$

El movimiento horizontal es a velocidad constante:

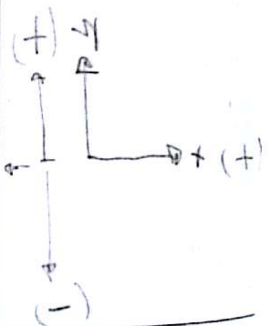
$$x = d = v_{x0}t = (v_0 cos\theta)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_0 cos\theta}$$

Este tiempo se reemplaza en la expresión para el desplazamiento vertical,

$$y = h = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2$$

Obteniéndose:

$$h - y_0 = v_0 sen\theta\left(\frac{d}{v_0 cos\theta}\right) + \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{d}{v_0 cos\theta}\right)^2$$



Después de simplificar podemos despejar v_0:

$$h - y_0 = dtg\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2 cos^2\theta}$$

Despejando y sustituyendo los valores numéricos, encontramos:

$$v_0 = \frac{120\text{m}}{cos37}\sqrt{\frac{9{,}8}{2(120tg37° - 20 + 1)}} = 39{,}4 \text{ m/s}$$

b) El tiempo que tardó la pelota en llegar a la pared fue:

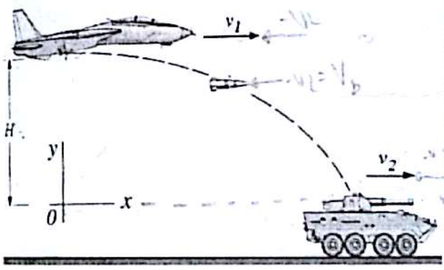
$$t = \frac{d}{v_0 cos\theta} = \frac{120\text{m}}{(39{,}4\text{m/s})cos37°} = 3{,}81 \text{ s}$$

Respuesta:

a) $v_0 = 39{,}4$ m/s
b) $t = 3{,}81$ s

PR-4.10. *¡El sitio donde debería soltar la bomba!*

Desde un avión de combate se deja caer una bomba sobre un tanque enemigo.



El avión vuela horizontalmente a una altura H = 500 m sobre el tanque y con una velocidad v_1 = 200km/h (55m/s).

El tanque marcha por una carretera con una velocidad de 18 km/h (6 m/s). ¿En qué posición, el avión debería soltar la bomba, para que le caiga al tanque?

* No tome en cuenta la resistencia del aire ni la velocidad del viento.

Solución: Elegimos el origen de coordenadas a nivel de la boca del cañon y exactamente en la vertical, por debajo del punto donde se encontraba el avión en el momento de soltar la bomba. Si se toma el eje vertical con sentido positivo hacia arriba, la ecuación para el movimiento vertical de la bomba es:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = H - \frac{1}{2}gt^2$$

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$, $v_{0x} = +55$ m/s

$y_0 = H = +100$ m, $\; v_{0y} = 0$

$a_y = -g = -9{,}8$ m/s²

Cuando la bomba llega al suelo se tiene: $y = 0$, de modo que esta ecuación permite obtener el tiempo de vuelo:

Solución: a) Elegimos el origen O en el punto de lanzamiento de la moto y tomamos el eje y + hacia arriba.

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0, \quad v_{0x} = v_0 \cos\theta$
$x_0 = 0$
$y_0 = 0, \quad v_{0y} = v_0 sen\theta$

El movimiento horizontal es a velocidad constante:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = (v_0 cos\theta)t$$

Para el movimiento vertical la aceleración es, $a_y = -g$:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene la ecuación de la trayectoria $y(x)$:

$$y(x) = v_0 sen\theta\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2$$

$$y(x) = x tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}x^2$$

Imponiendo la condición crítica para $x = d$, en que la moto no debe descender por debajo del nivel del techo del último carro, $y = -h$, se obtiene:

$$-h = d tg\theta - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}d^2$$

Despejando y sustituyendo los valores numéricos:

$$v_0 = \frac{d}{cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(h + d tg\theta)}}$$

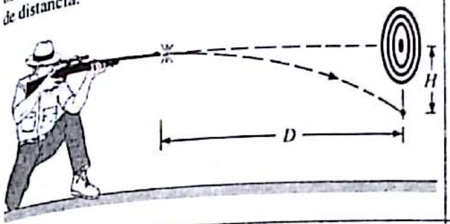
$$v_0 = \frac{58{,}0}{\cos 45°}\sqrt{\frac{9{,}80}{2(2{,}00 + 58 tg45°)}} = 23{,}4 \text{ m/s}$$

Respuesta

$$\boxed{v_0 = \frac{d}{cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(h + d tg\theta)}} \qquad v_0 = 23{,}4 \text{ m/s}}$$

PR-4.08. *Donde pone el ojo "no" pone la bala*

En una práctica de tiro, se dispara con un rifle en forma horizontal hacia el centro de un blanco que está a 200 m de distancia.



Si la velocidad inicial de la bala es 400 m/s.

a) ¿A qué distancia por debajo del centro del blanco incide la bala?

b) ¿A qué ángulo de elevación se debe apuntar el rifle para poder golpear en el centro del blanco?

Solución: a) Elegimos el origen en el punto de disparo y el eje y+ hacia arriba. Primero encontremos el tiempo que tarda el proyectil en viajar la distancia horizontal:

$$D = v_{x0}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{D}{v_{x0}} = \frac{200\text{m}}{400\text{m/s}} = 0{,}5\text{s}$$

a) Lanzamiento horizontal

Condiciones iniciales:

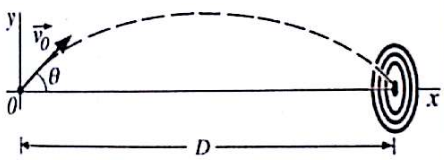
$x_0 = 0,\ v_{x0} = 400$ m/s
$y_0 = 0,\ v_{y0} = 0$
$a_y = -g = -9{,}8$ m/s²

El descenso vertical de la bala en ese intervalo de tiempo es:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8)(0{,}5)^2 = -1{,}23\text{m}$$

La bala llega a 1,23 m por debajo del centro del blanco.

b) Sea θ el ángulo que forma la velocidad inicial, $\vec{v}_0$, con la horizontal.



b) Lanzamiento a un ángulo θ.

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0,\ v_{x0} = v_0 cos\theta$
$y_0 = 0,\ v_{y0} = v_0 sen\theta$
$a_y = -g = -9{,}8$ m/s²

Si la bala parte de la posición $y = 0$ y llega al blanco, su posición vertical final debe ser también $y = 0$:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 sen\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando $sen\theta$ y sustituyendo el tiempo de viaje calculado en la parte (a), se obtiene el ángulo de elevación:

b) La componente horizontal de la velocidad el paquete permanece sin cambiar durante el vuelo. La distancia horizontal recorrida es:

$$d = v_{0x}T = v_0 sen\theta T = 199sen53,1°(5,0) = 796m$$

c) Cuando el paquete llega al suelo las componentes de su velocidad son:

$$v_{px} = v_0 sen\theta = 199sen53,1° = 159m/s$$

$$v_{py} = v_0 cos\theta + gT = 199cos53,1° + 9,8(5) = 169m/s$$

El módulo de la velocidad de aterrizaje del paquete es:

$$v_p = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2} = \sqrt{159^2 + 169^2} = 232m/s$$

Respuesta:

a) $v_a = 199m/s$
b) $d = 796m$
c) $v_p = 232m/s$

PR-4.13. *Pelota que rueda escaleras abajo*

Una pelota sale rodando desde lo alto de una escalera con una velocidad horizontal de módulo 2 m/s. Los escalones son de 25 cm de alto y de 25 cm de ancho. ¿En cuál escalón golpeará primero la pelota?

Solución: Tomamos el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, y el eje $y+$ en dirección vertical hacia abajo. Las ecuaciones de movimiento de la pelota son:

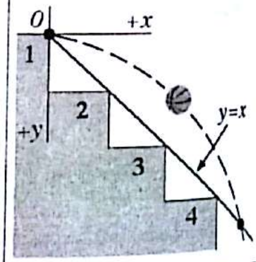
Horizontal: $x = x_0 + v_{x0}t = (2m/s)t$

Vertical: $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9,80m/s^2)t^2$

Condiciones iniciales:
$x_o = 0,\ y_o = 0$
$v_{xo} = 2$ m/s, $v_{yo} = 0$
$a_y = +g = 9,8$ m/s²

Por tener cada escalón igual ancho que altura, la intersección de la trayectoria de la pelota con la línea inclinada de la escalera se produce cuando: $y = x$, es decir:

$$2t = 4,90t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{4,90} = 0,408s$$



Por lo tanto, el desplazamiento horizontal es:

$$x = v_{x0}t = (2m/s)(0,408s) = 0,816m$$

y el número de escalones que avanza la pelota será:

$$N = \frac{0,816m}{0,816m} = 3,26$$

Por lo tanto, la pelota chocará con el cuarto escalón.

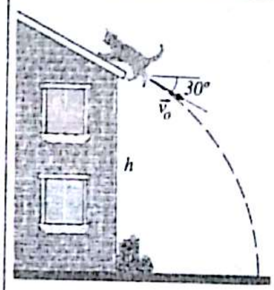
Respuesta:

La pelota golpea en el cuarto escalón

PR-4.14. *Caída de un gato desde un techo inclinado*

Un gato se resbala desde cierta altura y desciende por un techo mojado que tiene una inclinación de 30° con la horizontal. El gato se desprende desde una altura de 10,2 metros con una velocidad de 10 m/s.

a) ¿Cuál será la velocidad del gato en el instante de chocar con el suelo ?
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo choca?
c) ¿A qué distancia horizontal de la pared cae el gato?



Solución: a) Si se toma el origen en el borde del techo y eje vertical +y hacia abajo, las componentes de la velocidad inicial son:

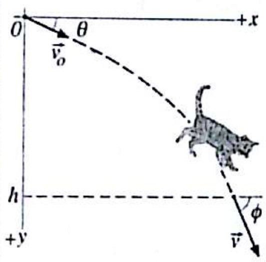
$$v_{ox} = v_0 cos\theta = (10,0m/s)cos30° = 8,66m/s$$

$$v_{oy} = v_0 sen\theta = (10,0m/s)sen30° = 5,00m/s$$

La componentes de la velocidad justo al chocar con el piso son:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2g(y - y_0) = 5^2 + 2(10,2 - 0)9,8 = 225\ m^2/s^2$$

$$v_y = 15,0m/s \quad y \quad v_x = v_{0x} = 8,66m/s$$



El ángulo que forma el vector velocidad final con el eje horizontal es:

$$tg\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{15,0m/s}{8,66m/s} = 1,73 \quad \Rightarrow \quad \phi = 60°$$

b) El tiempo para que ocurra el impacto con el piso viene dado por:

$$v_y = v_{0y} + gt$$

$$0 = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(500m)}{9,80m/s^2}} = 10,1s$$

El desplazamiento horizontal de la bomba en este tiempo es:

$$x_1 = v_1 t = (55m/s)(10,1s) = 556m$$

Mientras que el desplazamiento del tanque al mismo tiempo es:

$$x_2 = v_2 t = (6m/s)(10,1s) = 60,6m$$

Por lo tanto, para dar en el blanco, el avión debería soltar la bomba cuando se encuentra a una distancia horizontal del tanque:

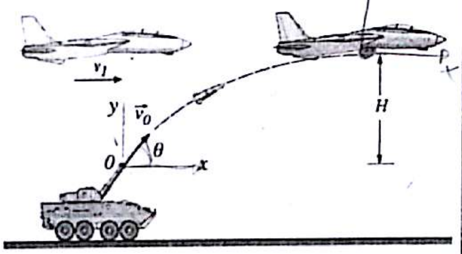
$$\Delta x = x_1 - x_2 = 556m - 60,6m = 495m$$

Respuesta:

$$\boxed{\Delta x = 495m}$$

PR-4.11. ***El enemigo contraataca*** Preguntar

El piloto del avión del problema anterior no calculó bien y la bomba que dejó caer no dio en el blanco.



En el momento en que el avión pasa directamente por encima del tanque enemigo, este está en reposo y contraataca. El avión vuela horizontalmente a una altura H = 500 m con una velocidad v_1 = 200 km/h (55 m/s).

a) ¿Cuál debería ser el menor valor de la velocidad v_0 del proyectil para derribar el avión?

b) ¿Cuál debería ser el ángulo de disparo?

Solución: Elegimos el origen de coordenadas en la boca del cañón y, por debajo del punto donde se encontraba el avión en el momento disparar el proyectil. La componente vertical de la velocidad inicial del proyectil $\vec{v}_0$ debe ser suficiente para que la máxima altura alcanzada coincida con la altura H del avión:

Preguntar

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y y$$

$$0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2gH \quad \Rightarrow \quad v_0^2 sen^2\theta = 2gH \qquad (1)$$

La componente horizontal de $\vec{v}_0$ debe coincidir con la velocidad del avión:

$$v_{0x} = v_0 cos\theta = v_1 \qquad (2)$$

Sustituyendo el $cos\theta$ dado por la Ecuación (2) en la Ecuación (1), se obtiene:

$$v_0^2(1 - cos^2\theta) = 2gH \qquad v_0^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right) = 2gH$$

$$v_0 = \sqrt{2gH + v_1^2} = \sqrt{2(9,80)(500) + (55)^2} = 113m/s$$

Sustituyendo v_0 dado por la Ecuación (2) en la Ecuación (1), se obtiene:

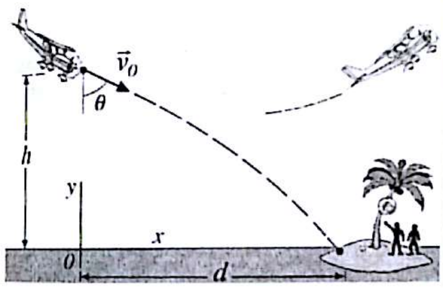
$$tg\theta = \frac{\sqrt{2gH}}{v_1} = \frac{\sqrt{2(9,80)(500)}}{55} = 1,80 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60,9°$$

Respuesta:

a) $v_0 = \sqrt{2gH + v_1^2} = 113m/s$
b) $\theta = arctg\left(\frac{\sqrt{2gH}}{v_1}\right) = 60,9°$

PR-4.12. ***Lanzamiento desde un avión en picada***

Un avión desciende formando con la vertical un ángulo θ = 53,1°, y suelta un paquete desde una altura h = 720 m.



Si el paquete aterriza 5 segundos mas tarde:

a) ¿Cuál era la velocidad del avión en el momento de soltar el paquete?

b) ¿Desde qué distancia horizontal del blanco fue lanzado el paquete?

c) ¿Cuál fue la velocidad del paquete al llegar al suelo?

Solución: a) Tomamos el sistema de coordenadas mostrado en la figura. La posición vertical del paquete es:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = h - v_0 cos\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

En el instante T = 5 s, el paquete toca suelo (y = 0):

$$0 = h - v_0 cos\theta T - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow v_0 = \frac{720 - 4,9(5)^2}{cos53,1°(5)} = 199m/s$$

La velocidad del avión en ese instante coincide con la velocidad inicial del paquete ($v_a = v_0 = 199m/s$).

Condiciones iniciales:

$x_o = 0$, $y_o = h = +720$ m

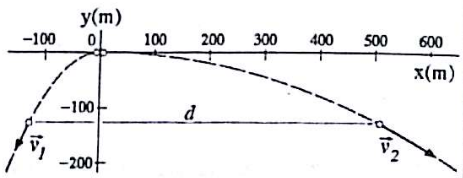
$v_{0x} = +v_0 sen\theta$,

$v_{0y} = -v_0 cos\theta$

$a_y = -g = -9,8$ m/s²

$$d=(v_{01}+v_{02})t=\frac{(v_{01}+v_{02})\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g}$$

$$d=\frac{(25\text{m/s}+100\text{m/s})\sqrt{(25\text{m/s})(100\text{m/s})}}{9{,}80\text{m/s}^2}=638\text{m}$$



Respuesta:

a) $t=\frac{\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g}=5{,}10\text{s}=5{,}1\text{ s}$

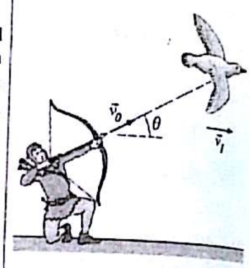
b) $d=\frac{(v_{01}+v_{02})\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g}=638\text{m}$

PR-4.30. *Un cazador inexperto y sin embargo le pega*

Un pato vuela horizontalmente a cierta altura, a velocidad constante $v_1=15$ m/s. El cazador lanza la flecha con velocidad $v_0 = 50$ m/s a un ángulo $\theta = 60°$, directamente hacia el pato. El cazador yerra el tiro porque apunta directamente, sin tomar en cuenta el avance del pato durante el tiempo de vuelo del proyectil.

a) Si a pesar de todo, la flecha le pega al pato, ¿a qué altura volaba este?

b) Demuestre que la flecha le pega al pato durante su descenso y determine el instante en que esto ocurre.



Solución: a) Elegimos el origen en el punto O de disparo y el eje positivo $+y$ hacia arriba. El instante t del encuentro del pato y la flecha se obtiene igualando sus desplazamientos horizontales:

Pato: $x_p=\frac{h}{tg\theta}+v_1t$ *Flecha:* $x_f=(v_0\cos\theta)t$

$$x_f=x_p \quad\Rightarrow\quad t=\frac{h}{tg\theta(v_0\cos\theta-v_1)}$$

Condiciones iniciales:

Pato:
$x_0=h/tg\theta,\ y_0=h$

Flecha:
$x_o=0,\ v_{xo}=v_o\cos\theta$
$y_o=0,\ v_{yo}=v_o sen\theta$

En ese instante la altura de la flecha debe ser igual a la del pato:

$$y_f=h=(v_0 sen\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$h=(v_0 sen\theta)\left[\frac{h}{tg\theta(v_0\cos\theta-v_1)}\right]-\frac{1}{2}g\left[\frac{h}{tg\theta(v_0\cos\theta-v_1)}\right]^2$$

Simplificando, se obtiene la altura del pato:

$$h=\frac{2v_1tg^2\theta}{g}(v_0\cos\theta-v_1)$$

$$h=\frac{2(15{,}0)tg^2 60°}{9{,}80}(50{,}0\cos60°-15)=91{,}8\text{m}$$

b) Los dos instantes en que la flecha alcanza esta altura h se obtienen de la ecuación de movimiento vertical:

$$y=y_0+v_{y0}t+\frac{1}{2}a_yt \quad\Rightarrow\quad h=v_0 sen\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$91{,}8=50{,}0 sen60°\,t-\frac{1}{2}(9{,}80)t^2$$

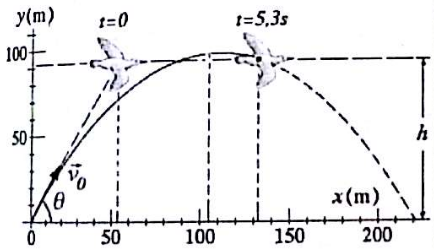
$$4{,}90t^2-43{,}3t+91{,}8=0$$

$$t=\frac{43{,}3\pm\sqrt{43{,}3^2-4(4{,}90)(91{,}8)}}{2(4{,}80)} \begin{cases} t_+=5{,}30\text{s} \\ t_-=3{,}53\text{s}\end{cases}$$

Veamos cuales eran los desplazamientos horizontales del pato y la flecha en esos instantes. En $t_-=3{,}53$s:

$$x_p=\frac{h}{tg\theta}+v_1t=\frac{91{,}8}{tg60°}+15(3{,}53\text{s})=106\text{m}$$
$$x_f=(v_0\cos\theta)t=50\cos60°(3{,}53\text{s})=88{,}3\text{m}$$

Es decir, en t_- el pato estaba mas adelante que la flecha.



$$x_p=\frac{h}{tg\theta}+v_1t=\frac{91{,}8}{tg60°}+15(5{,}30\text{s})=132{,}5\text{m}$$
$$x_f=(v_0\cos\theta)t=50\cos60°(5{,}30\text{s})=132{,}5\text{m}$$

Queda demostrado que la flecha le pega al pato en el instante $t=5{,}30$s, durante la bajada.

Respuesta:

a) $h=\frac{2v_1tg^2\theta}{g}(v_0\cos\theta-v_1)$

$h=91{,}8$ m

b) La flecha le pega al pato durante la bajada, en $t=5{,}30$s.

$$x(t)=\frac{1}{2}at^2 \qquad y(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

Sustituyendo t de la primera ecuación en la segunda, obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y=v_0\sqrt{\frac{2x}{a}}-\frac{1}{2}g\frac{2x}{a}=10\sqrt{\frac{2}{2,45}}\sqrt{x}-\frac{9,80}{2,45}x=9,04\sqrt{x}-4x$$

b) En el punto de llegada $y = 0$, por lo tanto:

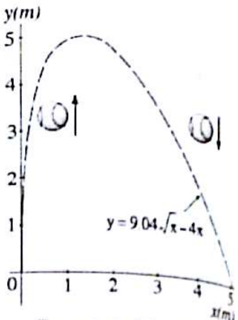
$$t(v_0-\frac{1}{2}gt)=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{2v_0}{g}=\frac{2(10,0\text{m/s})}{9,80\text{m/s}^2}=2,04\text{s}$$

La distancia horizontal en que la pelota es arrastrada por el viento es:

$$L=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}(2,45\text{m/s}^2)(2,04\text{s})^2=5,10\text{m}$$

b) En el punto mas alto la pelota $v_y=0$:

$$v_y^2=v_0^2-2gh \quad\Rightarrow\quad h=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{(10,0\text{m/s})^2}{2(9,80\text{m/s}^2)}=5,10\text{m}$$



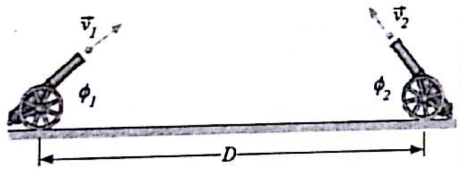
Trayectoria de la pelota

Respuesta:

a) $y(x)=9,04\sqrt{x}-4x$
b) $L = 5,10$m, c) $h = 5,10$m

PR-4.24. *Choque en el aire entre proyectiles*

Desde un cañón se dispara un proyectil a un ángulo ϕ_1 = 45° con una velocidad inicial v_1 = 100 m/s.



Al mismo tiempo, se dispara desde otro cañón, un proyectil a un ángulo ϕ_2 = 60°. La distancia entre los dos cañones es D = 1200 m.

a) Determine la velocidad inicial v_2 para que pueda interceptarlo.

b) ¿En qué sitio ocurre la intercepción?

Solución: Elegimos el origen de coordenadas a nivel de la boca del cañón *1*, y el eje vertical con sentido positivo hacia arriba. Las ecuaciones de movimiento son:

$$y_1(t)=(v_1 sen\phi_1)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y_2(t)=(v_2 sen\phi_2)t-\frac{1}{2}gt^2$$

En el instante del choque, la posición vertical de los dos proyectiles deben coincidir $y_1(t)=y_2(t)$:

$$(v_1 sen\phi_1)t-\frac{1}{2}gt^2=(v_2 sen\phi_2)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v_1 sen\phi_1=v_2 sen\phi_2$$

La velocidad v_2 es:

$$v_2=v_1(\frac{sen\phi_1}{sen\phi_2})=100(\frac{\text{sen}45°}{\text{sen}60°})=81,6\text{m/s}$$

Las posiciones horizontales de los proyectiles son:

$$x_1(t)=(v_1 cos\phi_1)t \qquad x_2(t)=D-(v_2 cos\phi_2)t$$

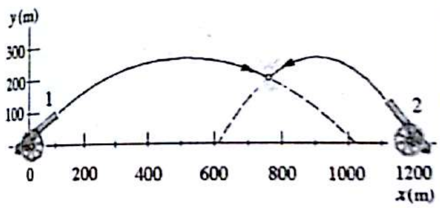
Estas posiciones también debe coincidir, $x_1(t)=x_2(t)$:

$$D-(v_2 cos\phi_2)t=(v_1 cos\phi_1)t$$

$$t=\frac{D}{v_1 cos\phi_1+v_2 cos\phi_2}=\frac{1200}{100,0\cos45°+81,6\cos60°}=10,8\text{s}$$

El punto donde ocurre el impacto está a una distancia:

$$x_1=(v_1 cos\phi_1)t=100\cos45°(10,8\text{s})=764\text{m}$$



Respuesta:

a) $v_2=v_1(\frac{sen\phi_1}{sen\phi_2})=81,6$m/s
b) En: x_1 = 764m

PR-4.25. *Ese bombero tiene muy buena puntería*

Un bombero trata de extinguir el fuego desatado en un edificio de altura H = 24 m. Se coloca a una distancia d = 20 m de la base del edificio manteniendo el pico de la manguera a una altura h = 1,90 m sobre el suelo. La velocidad de salida del chorro de agua es v_0 = 25 m/s.

a) Halle el ángulo θ del chorro de agua para que pase rozando con el borde del techo.

b) ¿A qué distancia Δx desde el borde del techo caerá el agua?

En el transcurso del tiempo sus coordenadas serán:

$$x_m(t) = d \qquad\qquad y_m(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

El *cambur* parte del origen $(0,\ 0)$ con velocidad inicial $(v_0 cos\theta, v_0 sen\theta)$ y sus coordenadas en función del tiempo serán:

$$x_c(t) = (v_0 cos\theta)t \qquad\qquad y_c(t) = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para que el cambur choque con el mono, sus coordenadas deben coincidir:

$$x_c = x_m \quad \Rightarrow \quad (v_0 cos\theta)t = d \qquad (1)$$

$$y_c = y_m \quad \Rightarrow \quad (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

En la ec. 2 se simplifican los términos $gt^2/2$ y si sustituimos el valor de t obtenido de la ec. 1, se obtiene:

$$h = (v_0 sen\theta)t = v_0 sen\theta(\frac{d}{v_0 cos\theta}) = d tg\theta$$

$$tg\theta = \frac{h}{d} = \frac{6m}{8m} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36{,}9°$$

Es decir, el niño debe lanzar el cambur directamente hacia el mono. Este resultado es consecuencia de que el cambur y el mono siempre están cayendo con la misma aceleración, y la velocidad vertical del cambur respecto al mono no cambia, de modo que el mono ve que el cambur siempre va derecho hacia él.

b) La velocidad mínima v_0 del cambur le permite pegarle al mono justo cuando este toque el suelo, $y_c = y_m = 0$:

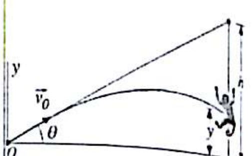
$$y_m(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{2h/g} \qquad (3)$$

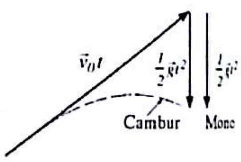
$$y_c = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{gt}{2sen\theta} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4), se obtiene, el mínimo de v_0:

$$v_0 = \frac{g}{2sen\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\sqrt{2gh}}{2sen\theta} = \frac{\sqrt{2(9{,}80)(6)}}{2sen36.9} = 9{,}0 m/s$$

Si la velocidad fuera menor que 9,0 m/s, el cambur nunca llegaría al sitio donde el mono toca al suelo.



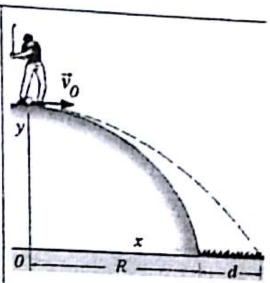


Respuesta:

a) Debe lanzar el cambur directo al mono: $\theta = 36{,}9°$
b) $v_0 > 9{,}0$ m/s

PR-4.27. *La pelota no debe tocar la loma*

Sobre una loma de forma hemisférica de radio R, se golpea una pelota de golf de forma tal que, salga en forma horizontal y descienda al suelo plano sin rozar la loma.
a) ¿Cual es la mínima velocidad horizontal v_o que se requiere?
b) ¿A que distancia d de la base de la loma, la pelota golpeará el suelo?



Solución: a) Tomamos el origen O a nivel del suelo y por debajo del sitio de lanzamiento, las coordenadas x e y de la pelota en caída libre son:

$$x = v_0 t \qquad\qquad y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = R - \frac{1}{2}gt^2$$

Condiciones iniciales:

$x_o = 0,\ v_{xo} = v_o$
$y_o = +R,\ v_{yo} = 0$

$a_y = -g$

Despejando t de la primera y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = R - (\frac{g}{2v_0^2})x^2$$

Para que los puntos $(x,\ y)$ de la trayectoria queden por encima de la loma circular se debe satisfacer la condición:

$$y^2 + x^2 > R^2$$

Por lo tanto: $$(R - \frac{gx^2}{2v_0^2})^2 + x^2 > R^2$$

Es decir: $$R^2 - \frac{Rgx^2}{v_0^2} + (\frac{gx^2}{2v_0^2})^2 + x^2 > R^2$$

$$-\frac{g}{v_0^2} + (\frac{g}{2v_0^2})^2 x^2 + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{g}{2v_0^2})^2 x^2 + 1 > \frac{Rg}{v_0^2}$$

Si se debe cumplir esta desigualdad para todo x, basta con que se cumpla para $x = 0$. Por lo tanto, el valor crítico de v_0 es:

$$1 > \frac{Rg}{v_0^2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{Rg}$$

b) El valor del alcance x se obtiene poniendo $y = 0$ y sustituyendo v_0 en la ecuación de la trayectoria:

$$y = R - \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2 = 0$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2v_0^2 R}{g}} = \sqrt{\frac{2(Rg)R}{g}} = \sqrt{2}R$$

La distancia de aterrizaje desde el pie de la loma es:

$$d = x_{max} - R = \sqrt{2}R - R = 0{,}41R$$

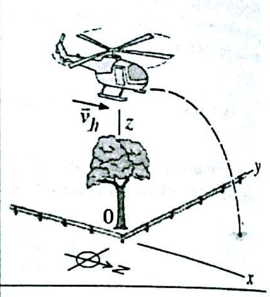
Respuesta:

a) $v_0 = \sqrt{Rg}$
b) $d = 0{,}41R$

PR-4.28. *Lanzando un paquete desde un helicóptero*

Un helicóptero vuela horizontalmente en línea recta hacia el norte a una altura h = 20 m sobre un terreno plano, a velocidad constante, $v_h = 10\sqrt{3}$ m/s. Justo cuando pasa por encima de un árbol, se lanza un paquete desde el helicóptero, con una velocidad horizontal v_p = 10 m/s, en dirección oeste respecto al helicóptero.

a) ¿Al cabo de cuanto tiempo el paquete tocará tierra?
a) ¿A qué distancia del árbol aterriza el paquete?
b) ¿Con qué velocidad pega el paquete con el suelo?



Solución: a) Elegimos el origen O al pie del árbol y los ejes: $+z$ hacia arriba, $+x$ hacia el norte y $+y$ hacia el oeste. La velocidad inicial del paquete es la superposición de la velocidad de lanzamiento hacia el oeste y la velocidad propia del helicóptero hacia el norte. El vector de posición es:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = h\hat{z} + (v_h\hat{x} + v_p\hat{y})t + \frac{1}{2}gt^2(-\hat{z})$$

Condiciones iniciales:

$x_o = y_o = 0, \quad z_o = h = 20\text{m}$
$v_{ox} = v_h = 10\sqrt{3}\text{m/s}$
$v_{oy} = v_p = 10\text{m/s}, \ v_{oz} = 0$

$a_x = a_y = 0, \ a_z = -g = -9{,}8\text{m/s}^2$

Las ecuaciones de movimiento en cada dirección son:

$$x(t) = v_h t, \qquad y(t) = v_p t, \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

En el instante en que el paquete toca tierra, $z(t) = 0$:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(20{,}0\text{m})}{9{,}80\text{m/s}^2}} = 2{,}02\text{s}$$

b) La distancia del paquete al árbol en ese momento es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_h t)^2 + (v_p t)^2} = t\sqrt{v_h^2 + v_p^2}$$

$$d = 2{,}02\text{s}\sqrt{(10\sqrt{3}\text{m/s})^2 + (10\text{m/s})^2} = 40{,}4\text{m}$$

c) La velocidad de aterrizaje del paquete es:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_h\hat{x} + v_p\hat{y} - gt\hat{z}$$

$$\vec{v} = 10\sqrt{3}\hat{x} + 10\hat{y} - 9{,}8(2{,}02)\hat{z} = 10\sqrt{3}\hat{x} + 10\hat{y} - 19{,}8\hat{z}\ \frac{m}{s}$$

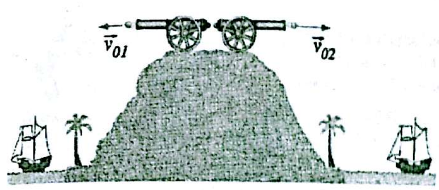
Respuesta:

a) $t = 2{,}02$ s
b) $d = 40{,}4$m
c) $\vec{v} = 10\sqrt{3}\hat{x} + 10\hat{y} - 19{,}8\hat{z}\ \frac{m}{s}$

PR-4.29. *De velocidades paralelas a perpendiculares*

Dos proyectiles son lanzados horizontalmente en forma simultánea desde la misma posición, con velocidades v_{01} = 25 m/s y v_{02} = 100 m/s en direcciones opuestas.

a) Determine el instante de tiempo en el cual sus velocidades son perpendiculares.
b) Halle la distancia entre los dos proyectiles en ese instante.



Solución: a) Tomemos el origen O de coordenadas en el punto de disparo, el eje $+y$ hacia arriba y el eje $+x$ hacia la derecha. Las velocidades de los proyectiles en función del tiempo son respectivamente:

$$\vec{v}_1 = v_{01}\hat{x} - gt\hat{y} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = -v_{02}\hat{x} - gt\hat{y}$$

El instante en que estas velocidades son perpendiculares está determinado por la condición, $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (v_{01}\hat{x} - gt\hat{y})(-v_{02}\hat{x} - gt\hat{y}) = -v_{01}v_{02} + (gt)^2 = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g} = \frac{\sqrt{(25\text{m/s})(100\text{m/s})}}{9{,}80\text{m/s}^2} = 5{,}10\text{s}$$

b) Los vectores de posición de los proyectiles son:

$$\vec{r}_1 = v_{01}t\hat{x} - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = -v_{02}t\hat{x} - \frac{1}{2}gt^2$$

El desplazamiento relativo entre los dos proyectiles es:

$$\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (v_{01} - v_{02})t\hat{x}$$

Encontramos la ecuación de la trayectoria:

$$y(x)=\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0})^2=(\frac{g}{2v_0^2})x^2 \qquad y^2=(\frac{g}{2v_0^2})^2x^4$$

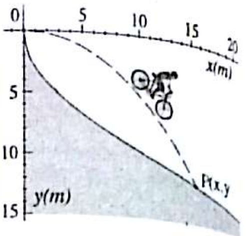
En el punto de coincidencia de la pista cuyo perfil es $y^2=9x$, se debe cumplir:

$$(\frac{g^2}{4v_0^4})x^4=9x$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de impacto son:

$$x=(\frac{36v_0^4}{g^2})^{1/3}=39,1\text{m}=[\frac{36(10,0^4)}{9,80^2}]^{1/3}=15,5\text{m}$$

$$y=3\sqrt{x}=3\sqrt{15,5\text{m}}=11,8\text{m}$$

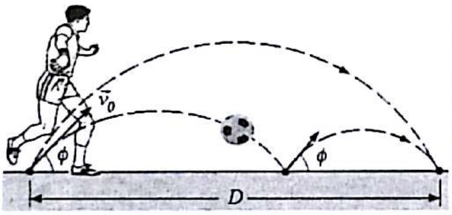


Respuesta:

$$x=(\frac{36v_0^4}{g^2})^{1/3}=15,5\text{m}$$
$$y=3\sqrt{x}=11,8\text{m}$$

PR-4.22. *Máximo alcance de una pelota con rebote*

Cuando una pelota de fútbol es pateada a 45° con la horizontal, su alcance horizontal D, tiene su valor máximo.



a) Suponga que la pelota se patea con la misma rapidez inicial v_0 pero a un ángulo ϕ, tal que después de golpear el suelo, rebota al mismo ángulo ϕ, pero pierde la mitad de su rapidez inicial. ¿A qué ángulo ϕ debe patearse para que tenga el mismo alcance total igual a D?
b) Compare los tiempos que toma la pelota en los dos casos: de vuelo directo y de vuelo con rebote.

Solución: a) En el primer caso, cuando la pelota es pateada a 45°, el tiempo de vuelo es:

$$y=(v_0 sen\theta)t-\frac{1}{2}gt^2=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{2v_0 sen\theta}{g}$$

y el alcance horizontal para el ángulo $\theta=45°$ es:

$$D=(v_0\cos\theta)t=v_0\cos\theta(\frac{2v_0 sen\theta}{g})=\frac{v_0^2 sen2\theta}{g}=\frac{v_0^2}{g}$$

En el segundo caso, el lanzamiento es a un ángulo ϕ y hay un rebote, el alcance neto es la suma:

$$d_1+d_2=\frac{v_0^2 sen2\phi}{g}+\frac{(v_0/2)^2 sen2\phi}{g}=\frac{5}{4}\frac{v_0^2 sen2\phi}{g}$$

Si imponemos la condición: $d_1+d_2=D$, se obtiene:

$$\frac{5}{4}\frac{v_0^2 sen2\phi}{g}=\frac{v_0^2}{g} \qquad sen2\phi=\frac{4}{5} \quad\Rightarrow\quad \phi=26,6°$$

b) Comparemos los dos tiempos de vuelo. Cuando la pelota es pateada a un ángulo $\theta=45°$, el tiempo es:

$$t_{45}=\frac{2v_0 sen\theta}{g}=\frac{2v_0 sen45°}{g}=\sqrt{2}\frac{v_0}{g}$$

Cuando hay rebote, el tiempo es:

$$t_\phi=\frac{2v_0 sen\phi}{g}+\frac{2(v_0/2)sen\phi}{g}=3\frac{v_0 sen26,6°}{g}=1,34\frac{v_0}{g}$$

La relación entre los dos tiempos, con rebote y sin rebote es:

$$\frac{t_\phi}{t_{45}}=\frac{1,34v_0/g}{\sqrt{2}v_0/g}=0,95$$

Respuesta:

a) $\phi=26.6°$
b) $\frac{t_\phi}{t_{45}}=0.95$

PR-4.23. *A la pelota se la está llevando el viento*

Una pelota de béisbol es bateada de refilón, de modo tal que sale disparada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_{0y} = 10 m/s. La pelota en el aire es arrastrada por un fuerte viento que le imprime una aceleración horizontal constante $a_x=2,45\text{m/s}^2$.
a) Escriba la ecuación de la trayectoria de la pelota.
b) ¿Cuál es la distancia horizontal que habrá viajado la pelota cuando regresa al mismo nivel de partida?
c) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

Solución: a) Escogemos el origen O en el punto de lanzamiento de la pelota y el eje +y hacia arriba. Ambos movimientos, el horizontal y el vertical de la pelota son con aceleración constante y las ecuaciones respectivas son:

Condiciones iniciales:
$x_o=0,\ v_{xo}=0$
$y_o=0,\ v_{yo}=+v_o$
$a_x=+a,\ a_y=+g$

$$tg\theta - tg\phi = \frac{gx}{2v_0^2 cos^2\theta}$$

Como el alcance es: $L = x/cos\phi$, podemos escribir:

$$tg\theta - tg\phi = \frac{gLcos\phi}{2v_0^2 cos^2\theta}$$

Despejando, obtenemos el alcance a lo largo de la colina:

$$L = \frac{2v_0^2(sen\theta cos\theta - tg\phi cos^2\theta)}{gcos\phi} = \frac{2v_0^2 cos\theta sen(\theta-\phi)}{gcos^2\phi}$$

$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$$

$$sen(\theta-\phi) = sen\theta cos\phi - cos\theta sen\phi$$

b) El máximo de L ocurre cuando es cerro su derivada respecto a θ:

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{v_0^2}{gcos\phi}(sen2\theta - 2tg\phi cos^2\theta)\right] = 0$$

$$\frac{v_0^2}{gcos\phi}(2cos2\theta + 2tg\phi sen2\theta) = 0 \Rightarrow tg2\theta = -ctg\phi$$

Esta expresión se puede escribir en la forma:

$$2\theta = arctg[-ctg\phi] = arctg[tg(\frac{\pi}{2}+\phi)] = \frac{\pi}{2}+\phi$$

$$tg(\frac{\pi}{2}+\phi) = -ctg\phi$$

Por lo tanto, el ángulo θ para máximo alcance es:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

En el caso especial cuando no existe inclinación del plano ($\phi = 0$), se obtiene el resultado bien conocido de máximo alcance horizontal para lanzamiento a $\theta = \pi/4$.

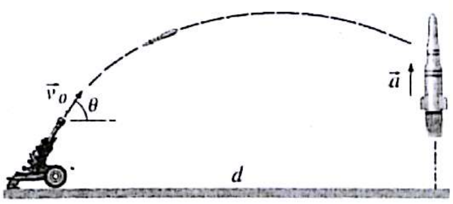
Respuesta:

a) $L = \frac{v_0^2(sen2\theta - 2tg\phi cos^2\theta)}{gcos\phi}$

b) L_{max} para: $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$

PR-4.20. *Destruyendo un cohete enemigo*

Un cohete es lanzado verticalmente con aceleración $\vec{a}$.



Para destruirlo en el aire, se dispara un proyectil en ese preciso instante, desde una distancia d y bajo un ángulo θ con el horizonte. ¿Con qué rapidez inicial v_o debe ser lanzado el proyectil?

Solución: Las posiciones verticales del cohete y del proyectil en función del tiempo son, respectivamente:

$$y_C(t) = \frac{1}{2}at^2$$

$$y_P(t) = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

En el instante de impacto las alturas del cohete y del proyectil deben ser iguales ($y_C = y_P$):

$$(v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow v_0 sen\theta = (\frac{g+a}{2})t$$

En ese mismo instante el proyectil ha recorrido una distancia horizontal d:

$$d = v_x t = (v_0 cos\theta)t \Rightarrow t = \frac{d}{v_0 cos\theta}$$

Sustituyendo este t en la expresión anterior, encontramos:

$$v_0 sen\theta) = (\frac{g+a}{2})(\frac{d}{v_0 cos\theta}) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{d(g+a)}{sen2\theta}}$$

Respuesta:

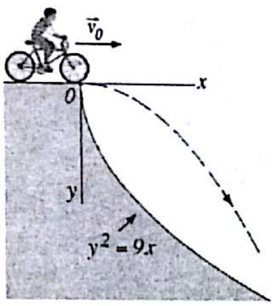
$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{d(g+a)}{sen2\theta}}}$$

PR-4.21. *Salto en bicicleta sobre pista parabólica.*

Una pista tiene una zona horizontal y a continuación hay una región que tiene forma parabólica, descrita por la expresión:

$$y^2 = 9x$$

Donde x e y están en metros. Un ciclista se desplaza desde la izquierda con una velocidad horizontal v_o = 10 m/s. ¿cuáles serán las coordenadas del punto de la pista parabólica donde tocará la bicicleta al caer? Se desprecian las dimensiones de la bicicleta.



Solución: Escogemos el origen 0 en el punto de lanzamiento y el eje vertical y con sentido positivo hacia abajo. Si eliminamos el tiempo de las ecuaciones de movimiento del ciclista:

Condiciones iniciales:
$x_o = 0$, $v_{xo} = v_o$
$y_o = 0$, $v_{yo} = 0$
$a_y = -g$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \qquad y(t) = +\frac{1}{2}gt^2$$

Solución: a) Escogemos el origen en el suelo, por debajo del pico de la manguera y el eje vertical +y hacia arriba. El movimiento horizontal es a velocidad constante:

$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos\theta)t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Condiciones iniciales:
$x_0 = 0,\quad v_{x0} = v_0 \cos\theta$
$y_0 = h,\quad v_{y0} = v_0\, sen\theta$

$a_y = -g = -9{,}8\,m/s^2$

El tiempo t se reemplaza en la expresión para el desplazamiento vertical:

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = h + (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Obteniéndose la ecuación de la trayectoria:

$$y(x) = h + x\frac{sen\theta}{cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

En el borde del techo $y = H$ para $x = d$:

$$H = h + d\frac{sen\theta}{cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Sustituyendo los valores numéricos de H, h, d, g, y v_0, se obtiene:

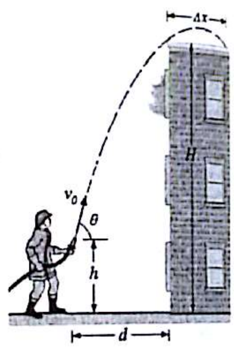
$$22{,}10 = 20\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} - \frac{3{,}136}{\cos^2\theta}$$

$$22{,}1\cos^2\theta + 3{,}136 = 20\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$888{,}4\cos^4\theta - 261.4\cos^2\theta + 9{,}834 = 0$$

$$\cos^2\theta = \frac{261{,}4 \pm \sqrt{261.4^2 - 4(888{,}4)(9{,}834)}}{2(888{,}4)} \quad \begin{array}{l} + \to \theta = 60{,}0^\circ \\ - \to \theta = 77{,}9^\circ \end{array}$$

La solución $\theta = 77{,}9^\circ$ corresponde a la situación en que el chorro pega del borde en la bajada. El ángulo buscado es $\theta = 60{,}0^\circ$.



b) El punto de impacto en el techo se obtiene de la ecuación de la trayectoria con $y = H$.

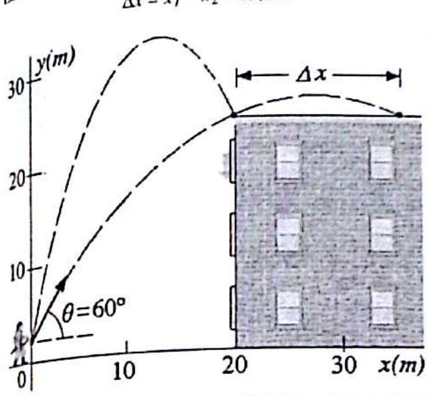
$$24{,}0 = 1{,}90 + x\,tg60^\circ - \frac{9{,}8}{2(25^2)\cos^2 60^\circ}x^2$$

$$0{,}03136x^2 - 1{,}732x + 22{,}1 = 0$$

$$0{,}03136x^2 - 1{,}732x + 22{,}1 = 0 \;\Big\rangle \begin{array}{l} x_1 = 35{,}2\,m \\ x_2 = 20{,}0\,m \end{array}$$

La distancia desde el borde es:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 15{,}2\,m$$

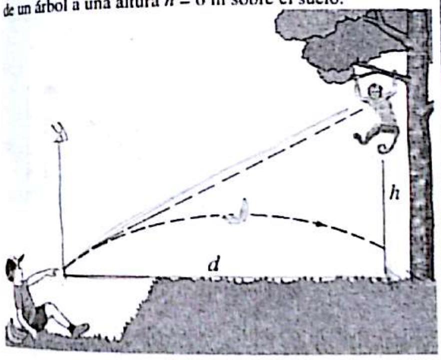


Respuesta:

a) $\theta = 60{,}0^\circ$
b) $\Delta x = x_1 - x_2 = 15{,}2\,m$

PR-4.26. ***Cómo se deben lanzar los cambures al mono?***

Un niño lanza cambures a un mono que cuelga de la rama de un árbol a una altura $h = 6$ m sobre el suelo.



La mano del niño queda al nivel del suelo y a una distancia horizontal $d = 8$ m del mono. El niño observa que el mono *se suelta* de la rama en el preciso instante en que el le lanza el cambur.

a) ¿A qué ángulo θ debe el niño lanzar el cambur para que siempre pegue contra el mono?

c) ¿Cuál es el mínimo valor del módulo de la velocidad, v_0 para que el cambur siempre le pegue al mono?

Solución: Tomemos el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento del cambur, y el eje y positivo hacia arriba, la aceleración es $a_y = -g$. Inicialmente el *mono* parte del punto (d, h) con velocidad inicial cero.

PR-4.18. *El esquiador levanta vuelo en una rampa*

Un esquiador se desliza por una rampa cubierta de nieve, y al final de la rampa sale con una velocidad de 12 m/s, a un ángulo $\phi = 20°$ hacia arriba de la horizontal.

Después de la rampa hay una ladera descendente de inclinación $\theta = 53°$ con la horizontal.

a) ¿A qué distancia aterriza el esquiador en la ladera?

b) ¿En qué momento el esquiador toca la ladera?

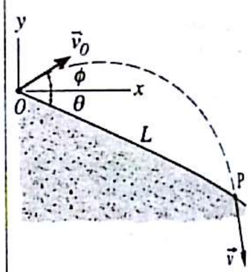
c) ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

Solución: a) Escogemos el origen O en el punto de lanzamiento y el eje vertical con sentido positivo hacia arriba. Las ecuaciones de movimiento del esquiador son:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\phi)t$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = (v_0 sen\phi)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Condiciones iniciales:
$x_o = 0,\ v_{xo} = v_o\cos\phi$
$y_o = 0,\ v_{yo} = v_o sen\phi$
$a_y = -g$



Si L es la longitud a lo largo de la rampa donde llega el esquiador, las coordenadas del punto P de llegada son:

$$x = L\cos\theta = (v_0 \cos\phi)t \qquad (1)$$

$$y = -L sen\theta = (v_0 sen\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

En este par de ecuaciones tenemos dos incógnitas, L y t. Podemos eliminar el tiempo, despejándolo de la ecuación (1) y sustituyéndolo en la ecuación (2). Obtenemos así:

$$L = \frac{2v_0^2[\,tg\phi\cos\theta + sen\theta\,]\cos^2\phi}{g\cos^2\theta}$$

$$L = \frac{2(12)^2[tg20°\cos53° + sen53°]\cos^2 20^0}{9{,}8\cos^2 53°} = 72{,}8\text{m}$$

Datos:
$\phi = 20°,\ \theta = 53°,$
$v_0 = 12$ m/s,
$g = 9{,}8\text{m/s}^2$

b) El tiempo que tarde el esquiador en descender es:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{L\cos\theta}{v_0\cos\phi} = \frac{(72{,}8\text{m})\cos53°}{(12{,}0\text{m/s})\cos20°} = 3{,}89\text{s}$$

c) Las componentes de la velocidad de aterrizaje son:

$$v_x = v_{0x} = v_0\cos\phi = (12{,}0\text{m/s})\cos20° = 11{,}3\text{m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sen\phi - gt$$

$$v_x = (12{,}0\text{m/s})sen20° - (9{,}80\text{m/s}^2)(3{,}89) = -34{,}0\text{m/s}$$

El ángulo que forma el vector con la horizontal es:

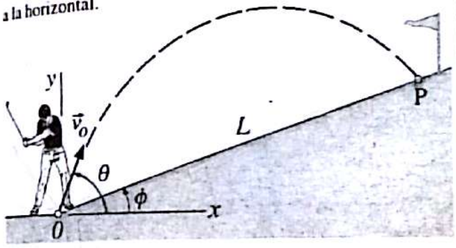
$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-34{,}0\text{m/s}}{11{,}3\text{m/s}} = -3{,}01 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -71{,}6°$$

Solución:

a) $L = 72{,}8$ m, b) $t = 3{,}89$s
c) $v_x = 11{,}3$ m/s, $v_y = -34{,}0$ m/s

PR-4.19. *Máximo alcance de una pelota en la colina*

Hacia una colina que tiene un ángulo de elevación ϕ, se lanza una pelota con velocidad $\vec{v}_0$ a un ángulo θ respecto a la horizontal.



a) ¿A qué distancia L, pegará la pelota a lo largo de la colina?

b) ¿A qué ángulo θ deberá ser lanzada la pelota si se desea lograr el máximo alcance posible?

Solución: a) Elegimos el origen en el punto O de disparo y el eje positivo +y hacia arriba. Las ecuaciones de movimiento horizontal y vertical del proyectil son:

$$x = v_{0x}t = (v_0\cos\phi)t$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = (v_0 sen\phi)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = x\,tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

Si $P(x,y)$ es el punto en la colina donde pega la pelota, sus coordenadas están relacionadas por: $y = x\,tg\phi$. Igualando esta expresión con la anterior, se obtiene:

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

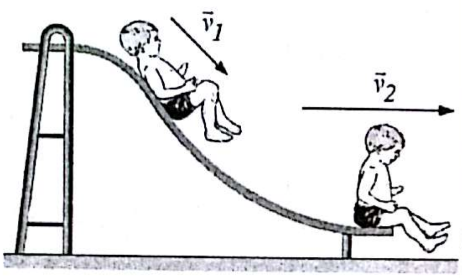
PE-4.01. ***¿Verdadero o Falso?***

Una de las siguientes afirmaciones es incorrecta:

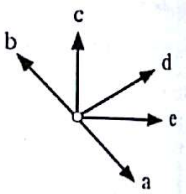
a) Si la aceleración es cero el vector velocidad debe ser constante.
b) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.
c) Es imposible desplazarse a lo largo de una curva sin aceleración.
d) El vector velocidad instantánea está siempre en la dirección del movimiento.
e) El vector aceleración instantánea no siempre queda en la dirección del movimiento.

PE-4.02. ***¿Hacia dónde apunta la aceleración media?***

El diagrama muestra la trayectoria curva de un niño deslizándose en un tobogán y sus velocidades, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en dos instantes diferentes:



¿Cuál será la dirección del vector *aceleración media* en ese intervalo de tiempo?



PE-4.03. ***Longitud de la trayectoria y desplazamiento***

En un determinado intervalo de tiempo la longitud total recorrida por una partícula a lo largo de su trayectoria es 5 m. Resulta imposible que su desplazamiento en ese mismo intervalo de tiempo tenga un módulo de:

a) 0 b) 1 m c) 3 m d) 5 m e) 6 m

PE-4.04. ***Aceleración de una pelota en el aire***

Se lanza una pelota al aire y viaja en movimiento parabólico. Si despreciamos el rozamiento del aire, la aceleración de la pelota.....

a) es la misma durante todo el trayecto
b) depende de si la pelota va subiendo o va bajando
c) es máxima en la cúspide de su trayectoria
d) es cero en la cúspide de su trayectoria
e) depende del ángulo de lanzamiento.

PE-4.05. ***Cuando la pelota alcanza su altura máxima...***

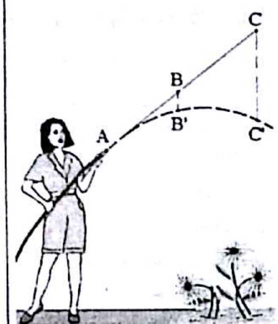
Cuando se lanza una pelota al aire y sigue una trayectoria parabólica, en el punto de altura máxima.....

a) la aceleración es cero y la velocidad es diferente de cero.
b) la velocidad es cero pero la aceleración es diferente de cero.
c) la velocidad es paralela a la aceleración.
d) la velocidad es perpendicular a la aceleración.
e) tanto la aceleración como la velocidad son nulas.

PE-4.06. ***Relación entre distancias de caída del chorro***

Por la boca de la manguera sale un chorro de agua (punto A). Suponga que trazamos una línea recta imaginaria en la dirección de lanzamiento del chorro y tomamos en esta línea dos puntos, B y C, a distancias tales que:

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$



¿Qué relación guardan las correspondientes líneas verticales $\overline{B'B}$ y $\overline{C'C}$ que conectan estos puntos con la trayectoria del chorro?

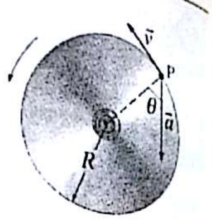
a) $\overline{C'C} = 2\,\overline{B'B}$ b) $\overline{C'C} = 2{,}5\,\overline{B'B}$ c) $\overline{C'C} = 3\,\overline{B'B}$

d) $\overline{C'C} = 4\,\overline{B'B}$ e) $\overline{C'C} = 4{,}9\,\overline{B'B}$

PR-5.02. *Punto en la periferia de un disco en rotación*

Un punto P en la periferia de un disco de radio R = 1 m se está moviendo con una rapidez que varía con el tiempo. En cierto instante el vector aceleración tiene módulo $|\vec{a}|$ = 5 m/s² y forma un ángulo θ = 36,9° con la línea radial. En ese instante, determine:

a) La aceleración radial de la partícula.
b) La velocidad de la partícula.
c) Su aceleración tangencial.



Solución: a) La aceleración radial es la proyección del vector $\vec{a}$ sobre la línea radial:

$$a_r = a\cos\theta = (5.0\text{m/s}^2)\cos 36.7° = 4.0\text{m/s}^2$$

b) La velocidad lineal está relacionada con la aceleración radial:

$$a_r = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a_r R} = \sqrt{(4.0\text{m/s}^2)(1.0\text{m})} = 2.0\text{m/s}$$

c) Si $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$, el módulo de la aceleración tangencial es:

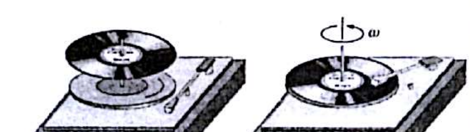
$$a_t = \sqrt{a^2 - a_r^2} = \sqrt{(5.0\text{m/s}^2)^2 - (4.0\text{m/s}^2)^2} = 3.0\text{m/s}^2$$

Respuesta:

a) $a_r = 4{,}0\text{m/s}^2$
b) $v = 2{,}0\text{m/s}$
c) $a_t = 3{,}0\text{m/s}^2$

PR-5.03. *Prende el tocadiscos y luego apágalo*

Un disco LP "de los viejos", que tiene un radio R = 15 cm, empieza a girar aceleradamente hasta alcanzar la rapidez angular final de 33¹/₃ rpm en dos segundos.



a) ¿Cuál es su aceleración angular y el ángulo que habrá girado en ese tiempo?
b) Calcule las componentes de la aceleración lineal en un punto del borde, al cabo de un segundo.
c) Después de haber apagado el aparato, el disco completa dos vueltas y se detiene. Halle la aceleración angular (constante), y el tiempo que tarda en detenerse.

Solución: a) La rapidez angular del disco es:

$$\omega = \frac{(100\text{rev/min})(2\pi\text{rad/rev})}{(60\text{s/min})} = \frac{10}{9}\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3{,}49\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular es constante, y podemos usar la relación:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{3{,}49\text{rad/s} - 0}{2\text{s}} = 1{,}75\text{rad/s}^2$$

El ángulo girado por el disco en dos segundos es:

$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(1{,}75\text{rad/s}^2)(2\text{s})^2 = 3{,}5\text{rad}$$

$$\theta = 3{,}5\text{rad}\left(\frac{360°}{2\pi\text{rad}}\right) = 200°$$

b) La rapidez angular al cabo de 1s.de empezar a girar es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad = 0 + (1{,}75\text{ rad/s}^2)(1\text{s}) = 1{,}75\text{ rad/s}$$

$$a_t = \alpha r = (1{,}75\text{ rad/s}^2)(0{,}15\text{m}) = 0{,}262\text{ m/s}^2$$

$$a_r = \omega^2 r = (1{,}75\text{ rad/s})^2(0{,}15\text{m}) = 0{,}459\text{ m/s}^2$$

c) Al apagar el equipo, la rapidez angular disminuye a cero y la aceleración (negativa) se obtiene de la relación:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{0 - (3{,}49\text{rad/s})^2}{2(4\pi)} = -0{,}485\text{rad/s}^2$$

El tiempo que tarda el disco en detenerse es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 3{,}49\text{rad/s}}{-0{,}485\text{rad/s}^2} = 7{,}20\text{s}$$

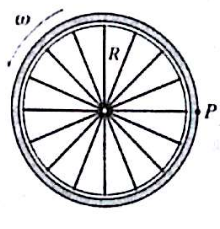
Respuesta:

a) θ = 3,5 rad = 200°
b) a_t = 0,262 m/s²
a_r = 0,459 m/s²
c) α = - 0,485 rad/s²
t = 7,20 s

PR-5.04. *Rueda con aceleración angular constante*

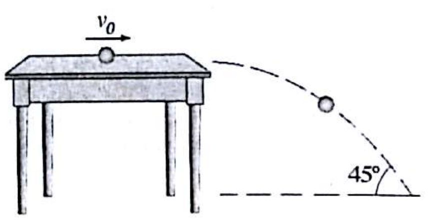
Sea una partícula en el borde de una rueda de radio R = 0,5 m que empieza a girar con una aceleración angular constante α = 4 rad/s². Al cabo de 1 segundo determine:

a) La velocidad angular y la velocidad lineal.
b) La aceleración tangencial y la aceleración radial.
c) El ángulo entre el vector $\vec{a}$ y la línea tangencial.
d) ¿Al cabo de cuánto tiempo, la aceleración tangencial tendrá igual magnitud que la radial?



PE-4.13. *¿Qué velocidad llevaba la pelota?*

Una pelota rueda por una mesa horizontal de 1 m. de alto y luego golpea el piso a un ángulo de 45°.



¿Con qué velocidad estaba rodando la pelota sobre la mesa?

a) $v_0 = 4{,}43$ m/s
b) $v_0 = 1{,}00$m/s
c) $v_0 = 7{,}07$ m/s
d) $v_0 = 10{,}0$ m/s
e) $v_0 = 19{,}6$ m/s

PE-4.14. *Tiempo de vuelo de un dardo*

Un dardo es lanzado horizontalmente hacia el centro del blanco y pega a una distancia de 4,9 cm. por debajo del centro.

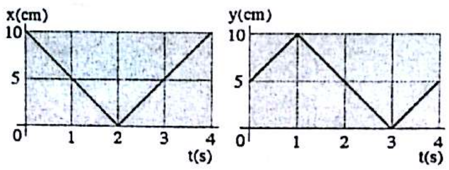
¿Cuál fue su tiempo de vuelo?

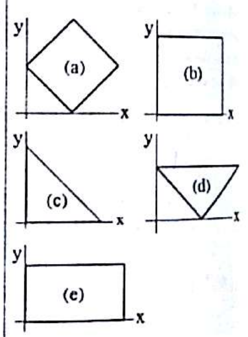
a) $t = 2{,}30$ s
b) $t = 0{,}49$ s
c) $t = 0{,}10$ s
d) $t = 0{,}05$ s
e) $t = 0{,}01$s

PE-4.15. *¿Cuál será la trayectoria de la partícula?*

Las coordenadas *x(cm)* e *y (cm)* de una partícula varían con el tiempo *t(s)* de la forma mostrada en la figura de abajo.

¿Cuál de los gráficos mostrados a la derecha representa la forma de su trayectoria en el plano *xy*?

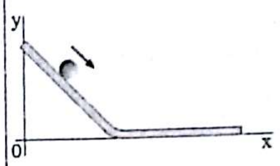


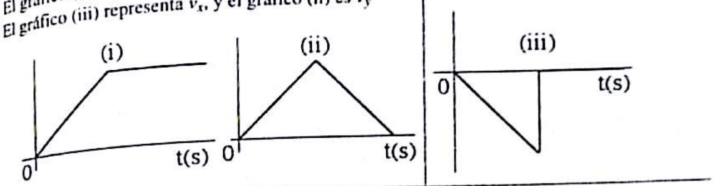


PE-4.16. *¿Cuáles son los gráficos de la velocidad?*

Una pelota parte del reposo desde lo alto de una rampa sin fricción. ¿Cuáles de los gráficos mostrados corresponden a las componentes de la velocidad en función del tiempo?

a) El gráfico (i) representa v_x, y el gráfico (ii) es v_y
b) El gráfico (i) representa v_x, y el gráfico (iii) es v_y
c) El gráfico (ii) representa v_x, y el gráfico (i) es v_y
d) El gráfico (ii) representa v_x, y el gráfico (iii) es v_y
e) El gráfico (iii) representa v_x, y el gráfico (ii) es v_y

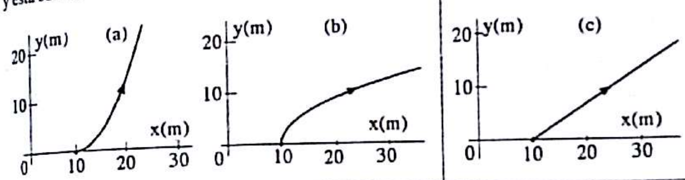




PE-4.17. *¿Cuál es la trayectoria de la partícula?*

Una partícula parte del reposo desde la posición $x = 10$m y está sometida a una aceleración: $\vec{a} = 6\hat{x} + 4\hat{y}$ (en m/s²).

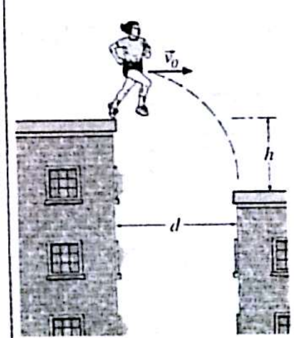
¿Cuál de estos gráficos representa la trayectoria de esta partícula?



PE-4.18. *Una decisión de muy alto riesgo...*

En un edificio se desata un incendio y una estudiante sube hasta la azotea para desde allí saltar al edificio contiguo. El borde de la segunda azotea está a una distancia horizontal $d = 6{,}0$ m y a una distancia vertical $h = 4{,}9$ m por debajo de la primera. Ella rápidamente saca cuentas y concluye que la mínima velocidad requerida en el momento del salto es...

a) $v_0 = 1{,}22$ m/s,
b) $v_0 = 3{,}0$ m/s,
c) $v_0 = 4{,}0$ m/s
d) $v_0 = 4{,}9$ m/s
e) $v_0 = 6{,}0$ m/s



LOS VECTORES VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

En el movimiento circular, el vector velocidad $\vec{v}$ es siempre tangente a la circunferencia y tiene la dirección del vector unitario tangencial $\hat{\theta}$:

$$\vec{v} = v\hat{\theta}$$

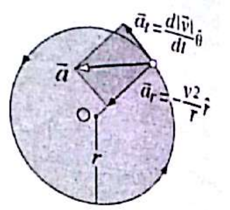
El vector aceleración es la derivada temporal de $\vec{v}$, por lo tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\theta}) = v\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \hat{\theta}\frac{dv}{dt} = (-v\omega)\hat{r} + (\frac{dv}{dt})\hat{\theta}$$

Tomando en cuenta que: $\omega = v/r$, encontramos que la aceleración tiene dos componentes:

$$\vec{a} = (-\frac{v^2}{r})\hat{r} + (\frac{d|\vec{v}|}{dt})\hat{\theta}$$

El primer término es la componente radial $\vec{a}_r$ y el signo negativo significa que está dirigida hacia el centro de la circunferencia y opuesta al vector unitario $\hat{r}$. El segundo término es la componente tangencial, $\vec{a}_t$.



Aceleración

radial tangencial

$$\vec{a} = (-\frac{v^2}{r})\hat{r} + (\frac{d|\vec{v}|}{dt})\hat{\theta}$$

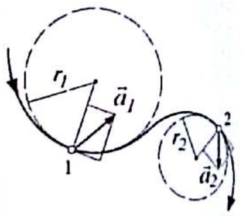
MOVIMIENTO CURVILÍNEO GENERAL

En general, si una partícula se mueve a lo largo de una curva arbitraria, cada tramo muy corto de la trayectoria se puede modelar como parte de una circunferencia de radio r. El círculo de curvatura es tangente a la trayectoria en el punto y la línea normal está dirigida hacia el centro de curvatura.

Podemos aplicar en cada punto las expresiones para las componentes radial y tangencial de la aceleración que dedujimos para el caso del movimiento circular.

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad a_r = \frac{v^2}{r}$$

La componente radial de la aceleración a_r permite determinar el radio de curvatura, $r = v^2/a_r$ y la tasa de cambio de la dirección $\omega = d\theta/dt = v/r$, incluso cuando v no es constante.



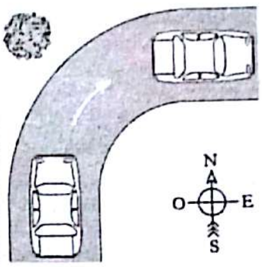
PROBLEMAS RESUELTOS

PR-5.01. ***Acelerando en la curva sin cambiar su rapidez***

Un carro se desplaza a 72 km/h (20 m/s) hacia el norte y gira 90° en una curva para dirigirse hacia el este. La rapidez del carro se mantiene constante y la curva tiene un radio de curvatura de 50 m. Determine:

a) La aceleración instantánea del carro cuando está a mitad de camino en la curva.

b) La aceleración media a lo largo de toda la curva de 90°.



Solución: a) El módulo de la aceleración radial instantánea del carro es:

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{(20\text{m/s})^2}{50\text{m}} = 8\text{m/s}^2$$

b) Durante el giro por el cuarto de circunferencia, la distancia recorrida es:

$$D = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi(50\text{m})}{4} = 78.5\text{m}$$

El tiempo que tarda en recorrer esta distancia es:

$$t = \frac{D}{v} = \frac{78.5\text{m}}{20\text{m/s}} = 3,93\text{s}$$

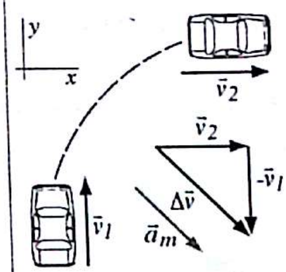
Durante este tiempo la variación de su velocidad es:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (20\hat{x} - 20\hat{y})\text{m/s}$$

Por lo tanto el vector aceleración media es:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(20\hat{x} - 20\hat{y})\text{m/s}}{3,93\text{s}} = 5,09(\hat{x} - \hat{y})\text{m/s}^2$$

El módulo del vector aceleración media es $|\vec{a}_m| = 5,09\sqrt{2} = 7,2\text{m/s}^2$ y la dirección: 45° ES.



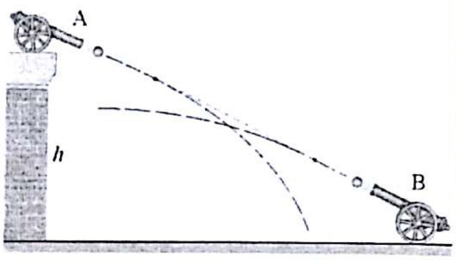
Respuesta:

a) $|\vec{a}_r| = 8\text{m/s}^2$

b) $|\vec{a}_m| = 7,2\text{m/s}^2$

PE-4.19. *¿Chocarán los proyectiles?*

Un cañón A está a una altura h por encima del nivel donde se encuentra otro cañón B, como muestra la figura.



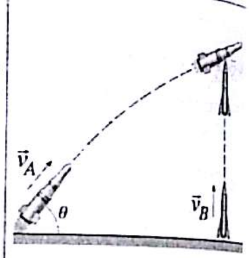
Los cañones apuntan *directamente* el uno hacia el otro y disparan simultáneamente proyectiles con igual rapidez. Si se desprecia la resistencia del aire, ...

a) Los proyectiles chocan en el aire independiente del valor h.
b) Chocan solo si sus velocidades son infinitamente grandes.
c) Chocan solo para un determinado valor de h.
d) Es imposible que choquen.

PE-4.20. *Interceptando un misil en el aire*

El misil A es lanzado con una velocidad inicial $v_A = 100$ m/s formando un ángulo $\theta = 53°$ con la horizontal. Para interceptarlo, se dispara simultáneamente un proyectil B desde un punto por debajo de la trayectoria de A. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial v_B del proyectil?

a) $v_B = 100$ m/s, b) $v_B = 80$ m/s, c) $v_B = 60$ m/s,
d) $v_B = 40$ m/s, e) Faltan datos.



CAP. 4: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
4.01		✓			
4.03					✓
4.05				✓	
4.07					✓
4.09			✓		
4.11		✓			
4.13	✓				
4.15	✓				
4.17			✓		
4.19	✓				

	a	b	c	d	e
4.02				✓	
4.04	✓				
4.06				✓	
4.08			✓		
4.10				✓	
4.12			✓		
4.14			✓		
4.16		✓			
4.18					✓
4.20		✓			

5

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento circular es un caso especial del movimiento en un plano, y ocurre cuando la trayectoria que sigue la partícula es una circunferencia. El movimiento circular tiene gran importancia práctica ya que es muy común en la naturaleza y en nuestra experiencia diaria. Es por ejemplo, el movimiento de una piedra que se hace girar atada al extremo de una cuerda, el de las ruedas de los carros y bicicletas en torno a sus ejes y, es una buena aproximación al movimiento de un satélite artificial alrededor de la tierra. Una situación que a muchos sorprende, es que un objeto que sigue una trayectoria circular esté acelerado, aun cuando su rapidez sea constante. En este caso la aceleración proviene del cambio en la "dirección" del vector velocidad y no en su módulo. Cuando ambos, la dirección y el módulo de la velocidad cambian en el tiempo, el vector aceleración puede describirse mediante dos componentes: una componente *radial* asociada al cambio en la "dirección" de la velocidad y una componente *tangencial* asociada el cambio en el "módulo" de la velocidad. Veremos que la descripción del movimiento circular es mas simple utilizando un sistema de coordenadas polares.

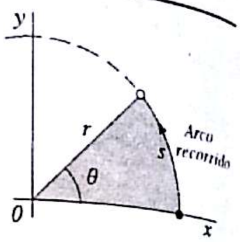
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Posición angular
- Velocidad lineal y velocidad angular
- Aceleración angular
- Aceleración radial (o centrípeta) y aceleración tangencial
- Movimiento circular uniforme
- Movimiento circular no-uniforme
- Descripción del movimiento en coordenadas polares.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

POSICIÓN ANGULAR

Un objeto en movimiento circular, alrededor de un punto origen O, se puede ubicar en un sistema de referencia por la distancia radial r y el ángulo θ medido desde el eje x. La distancia r es constante y al ángulo θ se le llama la *posición angular*.



En la descripción del movimiento circular es conveniente expresar los ángulos en unidades de *radianes*, que se definen por la razón entre dos longitudes: el arco s, y el radio r.

$$\theta = \frac{Arco}{Radio} = \frac{s}{r} \quad \text{radianes}$$

Un radian es el ángulo subtendido por un arco de longitud s de igual valor que el radio r, de la circunferencia.

VELOCIDAD ANGULAR

La velocidad angular media se define como el ángulo barrido por unidad de tiempo:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{rad/s}$$

Velocidad angular media

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular instantánea se obtiene tomando un intervalo de tiempo extremadamente pequeño:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{rad/s}$$

Velocidad angular instantánea

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

En realidad, $\omega = d\theta/dt$ es la rapidez angular o módulo de $\vec{\omega}$ ya que la velocidad angular, es un *vector*, cuya dirección se elige perpendicular al plano de movimiento. El carácter vectorial de la velocidad angular, será tomado en cuenta en la Unidad III (Sistemas de Partículas) en conexión con el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo rígido en el espacio.

ACELERACIÓN ANGULAR

La aceleración angular expresa el cambio de la velocidad angular, ω, con el tiempo:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{rad/s}^2$$

Aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Se observa que las definiciones de las variables angulares son análogas a las del movimiento lineal. Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas que relacionan θ, ω y α para aceleración angular constante, resultan semejantes a sus contrapartes para las variables lineales x, v y a.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

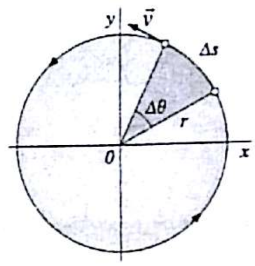
$$\theta = \theta_0 t + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

VELOCIDAD LINEAL Y VELOCIDAD ANGULAR

Una partícula que se mueve en una circunferencia tiene una velocidad lineal instantánea $\vec{v}$ que es tangencial a su trayectoria. Podemos definir una rapidez lineal media, como la razón de la longitud de arco recorrido, Δs, al tiempo empleado en recorrerlo Δt:

$$v_m = \Delta s/\Delta t.$$



En el límite: $\Delta t \to 0$, se obtiene la rapidez instantánea o módulo del vector velocidad:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt} \quad \text{m/s}$$

Como la longitud diferencial de arco es $ds = r d\theta$, podemos expresar v (m/s) en términos de ω (rad/s):

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

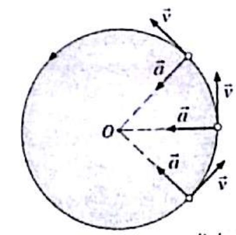
Velocidad lineal y velocidad angular

$$v = r\omega$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el *movimiento circular uniforme*, el módulo del vector velocidad (la rapidez), es constante, pero la dirección tangencial de $\vec{v}$ cambia continuamente. Debido a este cambio de dirección, el movimiento circular uniforme es siempre un movimiento acelerado.

El vector aceleración $\vec{a}$ es perpendicular a dicha circunferencia y siempre apunta hacia el centro. Por ello se denomina *aceleración radial o centrípeta*.



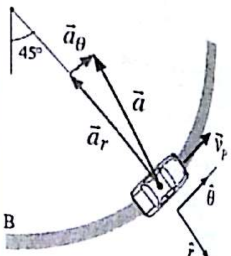
La aceleración es radial

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(6t+t^2)=(6+2t)\ \text{m/s}$$

En el instante $t = 4$s, cuando el carro pasa por el punto P, su rapidez es:

$$v_P = 6+2(4) = 14\ \text{m/s}\,, \qquad \vec{v}_P = 14\hat{\theta}\ \text{m/s}$$

Tomando en cuenta que la aceleración tangencial es $dv/dt = 2\ \text{m/s}^2$ = constante, el vector aceleración es:



$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta=\frac{v^2}{R}\hat{r}+\frac{dv}{dt}\hat{\theta}=-(\frac{14^2}{40/\pi})\hat{r}+2\hat{\theta}$$

$$\vec{a}=-15{,}4\hat{r}+2\hat{\theta}\,\text{m/s}^2$$

Cuyo módulo es:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=\sqrt{15{,}4^2+2^2}=15{,}5\ \text{m/s}^2$$

Respuesta:

a) $\vec{v}_P = 14\hat{\theta}\ \text{m/s}$
b) $\vec{a} = -15{,}4\hat{r}+2\hat{\theta}\ \text{m/s}^2$

PR-5.07. ***¿Qué pasaría si la Tierra girase más rápido?***

a) Calcule la velocidad y la aceleración de una persona situada en Caracas (Latitud 10° 30' N), debida a la rotación de la Tierra.
b) Suponga que la rotación de la Tierra aumentara hasta el punto que la magnitud de la aceleración radial, a_r, en el ecuador fuera igual a la aceleración de la gravedad g, ¿cuál sería la velocidad de un habitante de la zona ecuatorial? ¿Cuánto duraría un día si esto sucediera? ¿Qué sucedería a los objetos y a las personas?

Solución: a) El radio r de la circunferencia que viaja durante un día es: $r = R\cos\theta$, donde R es el radio de la Tierra y θ la latitud del lugar. El tiempo en para dar una vuelta completa es T = (24h)(60min/h)(60s/min) = 86400 s. La rapidez constante de la persona debido a la rotación terrestre es:

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi R\cos\theta}{T}=\frac{2\pi 6{,}37\text{x}10^6\text{m})\cos 10{,}5°}{86400\text{s}}=455\text{m/s}$$

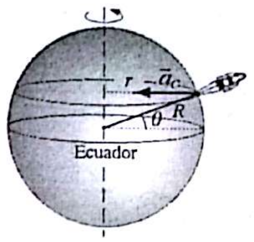
La magnitud de la aceleración $\vec{a}_c$ es:

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{v^2}{R\cos\theta}=\frac{(455\text{m/s})^2}{6{,}37\text{x}10^6\text{m})\cos 10{,}5°}=0.0331\text{m/s}^2$$

b) Si $a = g$, entonces:

$$a=\frac{v^2}{R}=g$$

La velocidad tangencial de la persona en el ecuador sería:



$$v=\sqrt{Rg}=\sqrt{(6{,}37\text{x}10^6\text{m})(9{,}80\text{m/s}^2)}=7900\text{m/s}$$

La duración del día sería:

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi(6{,}37\text{x}10^6\text{m})}{7900\text{m/s}}=5066\text{s}=84{,}4\text{min}=1{,}41\text{h}$$

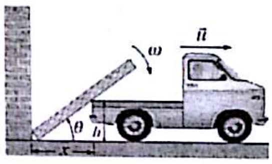
El hecho de que el valor *efectivo* de la aceleración de la gravedad g en el ecuador resulta menor que en los polos, es atribuido principalmente a la aceleración centrípeta de la rotación terrestre. Para hallar el valor efectivo de la gravedad en el ecuador, debemos sustraer a_c del valor de la aceleración debida puramente a la gravitación. Si a_c llegara a igualar y superar el valor de g, entonces los objetos sobre la superficie terrestre volarían al espacio, por un efecto *centrífugo*. Esto será analizado en detalle cuando estudiemos los marcos de referencia acelerados (en la unidad 2 de Dinámica de esta serie).

Respuesta:

a) $v = 455\text{m/s}$, $a = 0.0331\text{m/s}^2$
b) $v = 7900\text{m/s}$, $T = 1{,}41\text{h}$

PR-5.08. ***Rotación de una tabla que desliza***

Una tabla descansa en su extremo inferior sobre la esquina formada por el borde del piso y la pared, y en un punto intermedio está apoyada sobre la plataforma de un camión de altura h.
Si el camión se aleja a una velocidad horizontal constante u, ¿cuál será la velocidad angular de la tabla en función del ángulo θ con la horizontal?



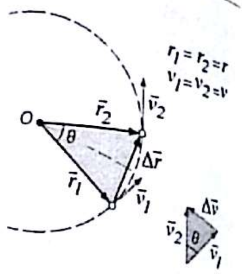
Solución: La distancia horizontal desde la esquina hasta el punto de apoyo con la plataforma es:

$$tg\theta=\frac{h}{x} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{h}{tg\theta}$$

La velocidad del camión es:

Para hallar el módulo de la aceleración radial, supongamos que en un intervalo de tiempo Δt, el vector posición gira un ángulo θ y el desplazamiento es $\Delta\bar{r}$.

Por ser los vectores $\bar{v}$ y $\bar{r}$ perpendiculares entre sí, el vector $\bar{v}$ cambia su dirección por el mismo ángulo θ. Además, como se ilustra en el dibujo, $|\bar{r}_1|=|\bar{r}_2|=r$ y $|\bar{v}_1|=|\bar{v}_2|=v$; el triángulo que forman los vectores velocidad es semejante al triángulo que forman los vectores de posición, y por lo tanto se cumple la relación:



$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta r}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta v=\frac{v}{r}\Delta r$$

Dividiendo por Δv y tomando el límite $\Delta t\rightarrow 0$, se obtiene la expresión para la aceleración:

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)=\frac{v}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)=\frac{v^2}{r}$$

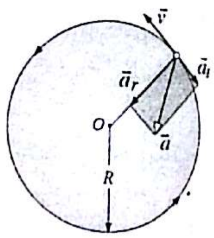
El vector $\bar{a}$ es paralelo al vector $\Delta\bar{v}$ y por lo tanto apunta hacia el centro (la aceleración es centrípeta)

Aceleración radial o centrípeta

$$a_r=\frac{v^2}{r}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR NO-UNIFORME

En un movimiento circular no-uniforme el módulo de la velocidad, varía en cada punto y hay una componente tangencial de la aceleración, de modo que el vector aceleración tiene dos componentes:



La *aceleración radial* está asociada al cambio en la *dirección* de $\bar{v}$:

$$a_r=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$$

Aceleración radial
$a_r=\omega^2 r$

La *aceleración tangencial* está asociada a la variación del *módulo* de $\bar{v}$.

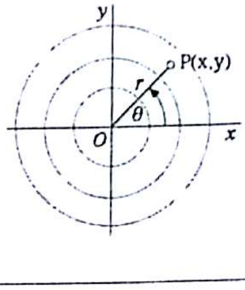
$$a_t=\frac{d|\bar{v}|}{dt}=\frac{d(\omega r)}{dt}=r\alpha$$

Aceleración tangencial
$a_t=r\alpha$

Siendo r el radio de la circunferencia, ω la velocidad angular (rad/s) y α la aceleración angular (rad/s^2).

LAS COORDENADAS POLARES

En el análisis vectorial del movimiento circular resulta más sencillo utilizar un sistema de coordenadas polares. En este sistema, la posición de un punto P que tiene coordenadas cartesianas (x, y) queda especificada por su distancia al origen, r, y por el ángulo θ, medido respecto del eje x, en sentido contrario a las agujas del reloj.



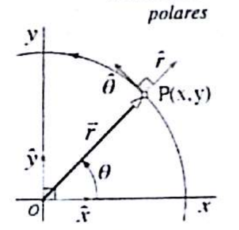
Podemos escribir los vectores de posición $\bar{r}$, velocidad $\bar{v}$ y aceleración $\bar{a}$ en términos de los vectores unitarios polares.

LOS VECTORES UNITARIOS POLARES $(\hat{r}, \hat{\theta})$

El vector unitario radial $\hat{r}$ tiene la dirección y sentido del vector posición y el vector unitario polar $\hat{\theta}$, es perpendicular al anterior. Estos vectores se pueden escribir en términos de los vectores unitarios cartesianos $(\hat{x}, \hat{y})$. El vector unitario radial es:

$$\hat{r}=\frac{\bar{r}}{r}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{r}=\cos\theta\hat{x}+\operatorname{sen}\theta\hat{y}$$

Vectores unitarios polares



Vectores unitarios cartesianos

El vector unitario tangencial $\hat{\theta}$ se obtiene tomando en cuenta que $\hat{\theta}\bullet\hat{r}=0$ y que su módulo es uno:

$$\hat{\theta}=-\operatorname{sen}\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$$

$\hat{r}=\cos\theta\hat{x}+\operatorname{sen}\theta\hat{y}$
$\hat{\theta}=-\operatorname{sen}\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$

Observe que, a diferencia de las direcciones de los vectores unitarios $(\hat{x}, \hat{y})$ que están fijos a lo largo de los ejes cartesianos, las direcciones de los vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\theta})$ varían, ya que se *mueven* junto con la partícula.

Por lo tanto, las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios polares $(\hat{r}, \hat{\theta})$ no son nulas:

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{x}+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{y}=\omega(-\operatorname{sen}\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y})=+\omega\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=+\omega\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{x}-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{y}=-\omega(\cos\theta\hat{x}+\operatorname{sen}\theta\hat{y})=-\omega\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\omega\hat{r}$$

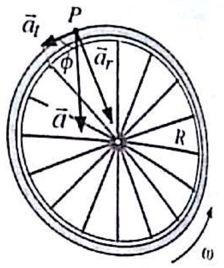
Donde hemos hecho la sustitución: $d\theta/dt=\omega$.

Solución: a) La partícula parte de reposo ($\omega_0 = 0$) y la aceleración angular es constante, por lo tanto, la velocidad angular al cabo de 1 segundo es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = (4\ \text{rad/s}^2)(1\ \text{s}) = 4\ \text{rad/s}$$

y la velocidad lineal en ese instante es:

$$v = \omega R = (4\ \text{rad/s})(0{,}5\ \text{m}) = 2\ \text{m/s}$$



b) La aceleración tangencial y la aceleración radial son respectivamente:

$$a_t = \alpha R = (4\ \text{rad/s}^2)(0{,}5\ \text{m}) = 2\ \text{m/s}^2\ \text{(es constante)}$$

$$a_r = \omega^2 R = (4\ \text{rad/s})^2(0{,}5\ \text{m}) = 8\ \text{m/s}^2$$

c) El ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con la línea tangencial en ese instante es:

$$tg\phi = \frac{a_r}{a_t} = \frac{8\text{m/s}^2}{2\text{m/s}^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \phi = 76°$$

d) Cuando la aceleración radial ($a_r = \omega^2 R = \alpha^2 t^2 R$) es igual a la tangencial ($a_t = \alpha R$), el tiempo transcurrido está dado por:

$$\alpha^2 t^2 R = \alpha R \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{4\text{s}^{-2}}} = 0{,}5\text{s}$$

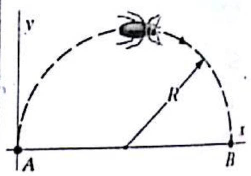
Respuesta:

a) $\omega = 4$ rad/s, $v = 2$ m/s
b) $a_r = 8$ m/s², $a_t = 2$ m/s²
c) $\phi = 76°$, d) $t = 0{,}5$ s

PR-5.05. *Ruta semi circular de una cucaracha*

Una cucaracha se mueve en una semicircunferencia de radio R = 2 m, partiendo del punto A, y su rapidez aumenta a una razón constante de π m/s². aceleración

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al punto B?
b) Determine el vector velocidad en ese instante.
c) Determine el vector aceleración en ese instante.



Solución: a) La aceleración tangencial es constante, y podemos aplicar las relaciones de cinemática rectilínea:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2 = \frac{1}{2}a_t t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_t}} = \sqrt{\frac{2(\pi R)}{a_t}} = \sqrt{\frac{2\pi(2\text{m})}{\pi\text{m/s}^2}} = 2\text{s}$$

b) La velocidad en ese instante es:

$$v = a_t t = (\pi\text{m/s}^2)(2\text{s}) = 2\pi\text{m/s}, \qquad \vec{v} = -2\pi\hat{y}\ \text{m/s}$$

c) La aceleración radial es:

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi\text{m/s})^2}{2\text{m}} = 2\pi^2\text{m/s}^2$$

Por lo tanto, el vector aceleración es:

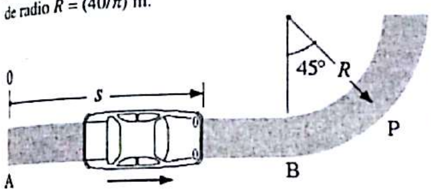
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = -(2\pi^2\hat{x} + \pi\hat{y})\ \text{m/s}^2$$

Respuesta:

a) $t = 2$ s,
b) $\vec{v} = -2\pi\hat{y}$ m/s
c) $\vec{a} = -(2\pi^2\hat{x} + \pi\hat{y})$ m/s²

PR-5.06. *Tomando una curva a rapidez variable*

Un carro parte del punto A, se desplaza por un tramo recto de longitud AB = 30 m y luego por un tramo curvo de radio $R = (40/\pi)$ m.



La distancia recorrida en función del tiempo está dada por:

$$s(t) = (6t + t^2)\ \text{m}$$

Donde el tiempo t está dada en segundos.

Halle la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ del carro en el punto P correspondiente a 45° de ángulo en el tramo curvo.

Solución: La distancia que ha recorrido cuando pasa por el punto P es:

$$s = \overline{AB} + \overline{BP} = 30\text{m} + \frac{1}{8}(2\pi\frac{40}{\pi})\text{m} = 40\text{m}$$

El tiempo transcurrido viene dado por la ecuación:

$$s(t) = 6t + t^2 = 40 \qquad t^2 + 6t - 40 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en t, tenemos:

$$t = \frac{1}{2}[-6 \pm \sqrt{36 + 4\text{x}40}] \quad \Rightarrow \quad t = 4\ \text{s}$$

La rapidez del carro en función del tiempo es:

$$u=\frac{dx}{dt}=(\frac{dx}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt})=(-\omega)\frac{d}{d\theta}(\frac{h}{tg\theta})=\frac{\omega h}{sen^2\theta}$$

Siendo la velocidad angular, $\omega=-d\theta/dt$. La velocidad angular común a todos los puntos de la tabla es:

$$\omega=\frac{u}{h}sen^2\theta$$

Note que la velocidad angular es máxima en la posición vertical de la tabla y decrece a cero en la posición horizontal.

Respuesta:

$$\boxed{\omega=\frac{u}{h}sen^2\theta}$$

PR-5.09. ***Derivadas vectoriales en la rotación***

Sea una partícula que se mueve en una circunferencia de radio r a rapidez constante. Demuestre que:

a) La derivada respecto del tiempo del vector posición $\vec{r}$ es perpendicular al vector posición.

b) La derivada respecto del tiempo del vector velocidad $\vec{v}$ es anti-paralelo al vector posición.

c) El módulo del vector aceleración es: $|\vec{a}|=v^2/r$.

Solución: a) Como la partícula se mueve en una circunferencia, su distancia al centro es constante:

$$r^2=\vec{r}\bullet\vec{r}=\text{constante}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}r^2=0=\vec{r}\bullet\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\bullet\vec{r}=2\vec{r}\bullet\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{r}\bullet\vec{v}$$

Esto significa que: $\vec{r}\bullet\vec{v}=0$ y por lo tanto, el vector $\vec{v}$ siempre es perpendicular a $\vec{r}$ en el movimiento circular.

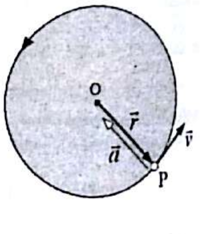
b) Si la partícula se mueve a rapidez constante, entonces:

$$v^2=\vec{v}\bullet\vec{v}=\text{constante}$$

Derivando respecto al tiempo esta expresión, se tiene:

$$\frac{d}{dt}v^2=0=\vec{v}\bullet\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{v}=2\vec{v}\bullet\frac{d\vec{v}}{dt}=2\vec{r}\bullet\vec{a}$$

$$\vec{v}\bullet\vec{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\text{ es }\perp\text{ a }\vec{v}$$



Como el vector $\vec{a}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ y a su vez este es perpendicular a $\vec{r}$, concluimos que $\vec{a}$ debe ser paralelo o anti-paralelo a $\vec{r}$ (ya que el movimiento queda en un plano). Para dilucidar estas dos posibilidades, diferenciamos respecto al tiempo la expresión: $\vec{r}\bullet\vec{v}=0$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\bullet\vec{v})=\vec{r}\bullet\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\bullet\vec{v}=\vec{r}\bullet\vec{a}+v^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}\bullet\vec{a}=-v^2 \quad \text{(es negativo)}$$

O sea que $\vec{r}\bullet\vec{a}=|\vec{r}||\vec{a}|cos\theta<0$ y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{r}$ es $\theta=180°$ (los vectores son anti-paralelos).

c) De la ecuación anterior se desprende que:

$$\vec{r}\bullet\vec{a}=|\vec{r}||\vec{a}|cos\theta=|\vec{r}||\vec{a}|(-1)=-v^2$$

$$ra=v^2 \quad\Rightarrow\quad a=v^2/r$$

Que es la expresión conocida de la aceleración centrípeta en un movimiento circular.

Respuesta:

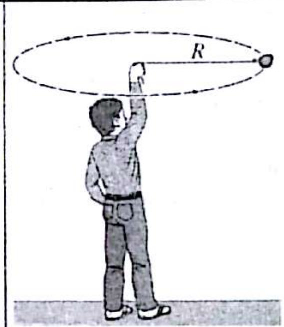
a) $\vec{v}\perp\vec{r}$
b) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{r}$
c) $a=v^2/r$

PR-5.10. ***Lanza la piedra y luego esconde la mano***

Un niño hace girar una piedra en un círculo horizontal situado a una altura h = 1,6 m sobre el suelo, por medio de una cuerda de longitud R = 1,2 m. En cierto instante la cuerda se rompe y la piedra sale disparada, golpeando el suelo a una distancia horizontal d = 10 m, desde el punto de salida.

¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

¿Cómo se compara esta aceleración con la de la gravedad?



Solución: Al romperse el hilo, el movimiento parabólico de la piedra tiene lugar en el plano vertical, que llamaremos x-z. Escogemos el origen en el suelo por debajo del punto donde la piedra abandona el movimiento circular con una velocidad horizontal $v_0\hat{x}$, y tomamos t = 0 en ese momento.

Las coordenadas de la piedra en función del tiempo son:

$$x(t)=v_{0x}t=v_0t$$

Condiciones iniciales:

$x_0=0, \quad z_0=+h$

$v_{x0}=v_o, \quad v_{oz}=0$

$a_z=-g$

Solución: a) Usaremos los vectores unitarios polares $(\hat{r}, \hat{\theta})$. Como el triángulo OPA es rectángulo, la magnitud del vector de posición viene dada por:

$$\cos\theta = \frac{r}{D} \quad \Rightarrow \quad r = D\cos\theta$$

Siendo $D = 2R$ el diámetro de la circunferencia. El vector posición es:

$$\vec{r} = D\cos\theta\hat{r}$$

El vector velocidad es:

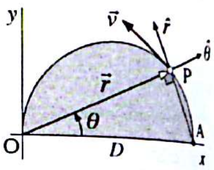
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(D\cos\theta\hat{r}) = -D\,sen\theta(\frac{d\theta}{dt})\hat{r} + D\cos\theta(\frac{d\hat{r}}{dt})$$

Como las direcciones de los vectores unitarios polares no son constantes, sus derivadas son distintas de cero: $d\theta/dt = \omega_0$ y $d\hat{r}/dt = \omega_0\hat{\theta}$, la expresión anterior queda:

$$\vec{v} = \omega_0 D(-sen\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta})$$

El módulo del vector velocidad es:

$$|\vec{v}| = \omega_0 D\sqrt{sen^2\theta + \cos^2\theta} = \omega_0 D = 2\omega_0 R = \text{constante}$$



b) El vector aceleración viene dado por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\omega_0 D(-sen\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \omega_0 D[-sen\theta\frac{d\hat{r}}{dt} - \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{r} - sen\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \cos\theta\frac{d\hat{\theta}}{dt}]$$

Tomando en cuenta que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \qquad \frac{d\hat{r}}{dt} = \omega_0\hat{\theta}, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\omega_0\hat{r}$$

Tenemos así la expresión vectorial de la aceleración:

$$\vec{a} = -2\omega_0^2 D[\cos\theta\hat{r} + sen\theta\hat{\theta}]$$

El módulo de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = 2\omega_0^2 D = 4\omega_0^2 R$$

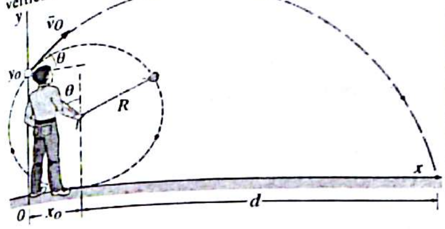
Respuesta:

a) $|\vec{v}| = 2\omega_0 R$
b) $|\vec{a}| = 4\omega_0^2 R$

PR-5.16. *¿Dónde aterriza la piedra?*

Una piedra se encuentra amarrada al extremo de un hilo de un metro de longitud y se le da vueltas en un plano vertical.

Cuando la velocidad angular de la piedra alcanza el valor $\omega = 10$ rad/s, el hilo se rompe y esto ocurre en el preciso instante en que forma un ángulo $\theta = 36{,}9°$ con la vertical, como indica la figura. Determine la distancia d donde la piedra toca el suelo.



Solución: En el instante en que se rompe el hilo, la piedra tiene una rapidez:

$$v_0 = \omega R = (10\text{rad/s})(1\text{m}) = 10\text{m/s}$$

A partir de ese instante ($t = 0$) la piedra seguirá un movimiento parabólico, bajo la acción de la gravedad. Las coordenadas iniciales son:

$$y_o = R + R\cos\theta = 1\text{m} + (1\text{m})(\cos 36{,}9°) = 1{,}80\text{ m}$$

Las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{xo} = v_o\cos\theta = (10\text{ m/s})(\cos 36{,}9°) = 8{,}00\text{ m/s}$$

$$v_{yo} = v_o\,sen\theta = (10\text{ m/s})(sen\ 36{,}9°) = 6{,}00\text{ m/s}$$

La piedra tocará el suelo cuando y = 0, por lo tanto:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 = 1{,}80 + 6{,}00t - \frac{1}{2}9{,}80t^2 = 0$$

Se obtiene la ecuación cuadrática para el tiempo de vuelo:

$$4{,}90t^2 - 6{,}00t - 1{,}80 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$t = \frac{6{,}00 \pm \sqrt{36{,}0 + 35{,}3}}{9{,}80} \begin{cases} t_+ = +1{,}47\text{s} \\ t_- = -0{,}25\text{s} \end{cases}$$

Condiciones iniciales:

$x_0 = 0$
$y_0 = R(1 + \cos\theta)$

$v_{ox} = v_0\cos\theta$
$v_{oy} = v_0 sen\theta$

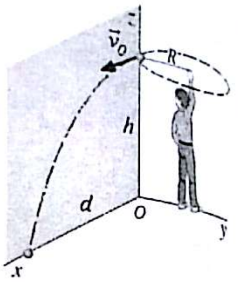
$a_y = -g$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

La piedra llega al piso cuando $x = d$. Se despeja el tiempo de la primera ecuación: $t = d/v_0$ y se sustituye en la segunda y tomando en cuenta que en ese instante $z = 0$:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad h = \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2$$

$$v_0 = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = (10\text{m})\sqrt{\frac{9{,}80\text{m/s}^2}{2(1{,}6\text{m})}} = 17{,}5\text{m/s}$$



La rapidez inicial de la piedra, v_0, es igual a la de su rotación, por lo tanto, la magnitud de la aceleración centrípeta a la que fue sometida la piedra es:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(17{,}5\text{m/s})^2}{1{,}2\text{m}} = 255\text{m/s}^2 \cong 26g$$

Respuesta:

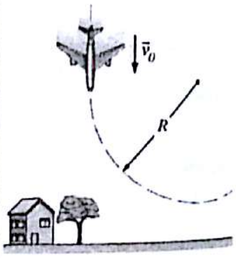
$\boxed{a_c = 255\text{m/s}^2 \cong 26g}$

PR-5.11. *Acrobacia en el aire*

Un avión cae verticalmente en picada con una velocidad de 900 km/h. Se sabe que el piloto puede soportar una aceleración máxima de valor $5g$ sin perder sus sentidos. Suponiendo que mantiene constante la rapidez del avión, ¿cuán cerca puede aproximarse a tierra para maniobrar, dando un cuarto de vuelta y recuperar su vuelo?

Solución: Si el piloto puede soportar una aceleración centrípeta máxima, a_m, es preciso que se cumpla la condición:

$$a_{max} \geq \frac{v_0^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R \geq \frac{v_0^2}{a_{max}}$$



Donde R es el radio de la media vuelta que da el avión durante la maniobra. En este caso $a_m = 5g = 5(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 49\ \text{m/s}^2$ y la rapidez es:

$$v_0 = 900\text{km/h} = \frac{(900\text{km/h})(1000\text{m/km})}{3600\text{s/h}} = 250\text{m/s}$$

Reemplazando estos números en la expresión anterior, encontramos que la menor distancia para maniobrar es:

$$R \geq \frac{(250\text{m/s})^2}{49\text{m/s}^2} = 1275\text{m} = 1{,}28\text{km}$$

Respuesta:

$\boxed{R \geq 1{,}28\text{km}}$

PR-5.12. *Pruebe que este es un movimiento circular*

Las coordenadas de cierta partícula en función del tiempo están dadas por:

$$x(t) = R\cos\omega t \quad \text{y} \quad y(t) = R\,\text{sen}\,\omega t$$

Donde R y ω son constantes. Demuestre que:

a) La distancia de la partícula al origen es constante, es decir, la trayectoria es una circunferencia de radio R.
b) El vector velocidad, $\vec{v}(t)$ es perpendicular al vector posición, $\vec{r}(t)$.
c) La rapidez de la partícula es constante e igual a ωR.
d) El vector aceleración $\vec{a}(t)$ tiene como módulo $\omega^2 R$ y es opuesto a $\vec{r}(t)$.

Solución: a) El vector posición es:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) = R\cos\omega t\hat{x} + R\,\text{sen}\,\omega t\hat{y}$$

Su módulo es:

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(R\cos\omega t)^2 + (R\,\text{sen}\,\omega t)^2} = R$$

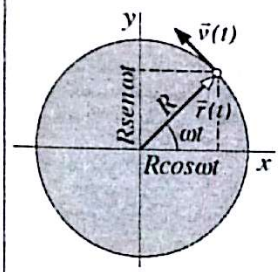
$$\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t = 1$$

b) Las componentes cartesianas de la velocidad son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -R\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{sen}\,\omega t) = +R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{v}(t) = -R\omega\,\text{sen}\,\omega t\hat{x} + R\omega\cos\omega t\hat{y}$$



La trayectoria es una circunferencia de radio R

Considerando el producto escalar $\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t)$:

$$(R\cos\omega t\hat{x} + R\,\text{sen}\,\omega t\hat{y}) \bullet (-R\omega\,\text{sen}\,\omega t\hat{x} + R\omega\cos\omega t\hat{y})$$

$$= (R\cos\omega t)(-R\omega\,\text{sen}\,\omega t) + (R\,\text{sen}\,\omega t)(R\omega\cos\omega t) = 0$$

Como $\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t) = 0$, luego $\vec{v}(t)$ es perpendicular a $\vec{r}(t)$.

c) El módulo de la velocidad es:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega\sqrt{\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t} = R\omega$$

d) Finalmente, para la aceleración tenemos:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\omega sen\omega t) = -R\omega^2 cos\omega t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(+R\omega cos\omega t) = -R\omega^2 sen\omega t$$

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 cos\omega t\hat{x} - R\omega^2 sen\omega t\hat{y} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

Es decir, el vector $\vec{a}(t)$ tiene sentido opuesto a $\vec{r}(t)$. El módulo de la aceleración es:

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 |\vec{r}(t)| = \omega^2 R = v^2/R$$

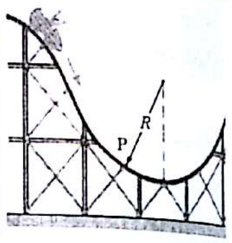
Que coincide con la fórmula de la aceleración centrípeta.

Respuesta:

a) $|\vec{r}(t)| = R =$ constante.
b) $\vec{v}(t)$ es $\perp$ a $\vec{r}(t)$
c) $|\vec{v}(t)| = R\omega =$ constante
d) $\vec{a}(t)$ es $\uparrow\downarrow$ a $\vec{r}(t)$
$|\vec{a}(t)| = v^2/R$
Este es un movimiento circular uniforme

PR-5.13. *Aceleración en el parque de diversiones*

Un niño desciende en un carrito por una pista de un parque de diversiones y pasa por un punto P donde el radio de curvatura es $R = 5$ m.
En ese instante la rapidez del carrito es 2 m/s y se está incrementando a razón de 0,6 m/s cada segundo. ¿Cuál es la aceleración del carrito en ese punto?

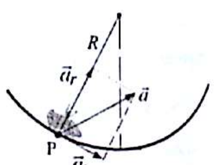


Solución: La componente radial de la aceleración depende de la rapidez instantánea y del radio de curvatura de la trayectoria en ese punto:

$$a_r = v^2/R = (2\ \text{m/s})^2/(5\text{m}) = 0{,}8\ \text{m/s}^2$$

La componente tangencial de la aceleración es el cambio en la rapidez:

$$a_t = d|\vec{v}|/dt = 0{,}6\ \text{m/s}^2$$



Por lo tanto el vector aceleración es:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = (0{,}8\hat{r} + 0{,}6\hat{\theta})\ \text{m/s}^2$$

Siendo $\hat{r}$ un vector unitario apuntando radialmente hacia el centro y $\hat{\theta}$ un vector unitario tangente a la trayectoria en el punto P. El módulo de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1\text{m/s}^2$$

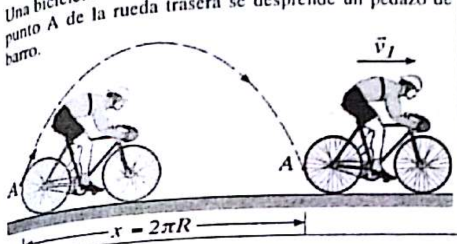
Respuesta:

$\boxed{\vec{a} = (0{,}8\hat{r} + 0{,}6\hat{\theta})\ \text{m/s}^2}$

PR-5.14. *Barro que salta de la rueda de una bicicleta*

Una bicicleta se desplaza a velocidad constante y desde el punto A de la rueda trasera se desprende un pedazo de barro.

Después de estar en el aire, el barro vuelve a caer sobre el mismo punto de la rueda. ¿Cuál es la velocidad de la bicicleta?



Solución: La componente vertical de la velocidad del barro es de magnitud igual a la de los puntos de la periferia de la rueda, $v_{0y} = v_f = \omega R$. En dirección vertical, la posición de llegada es igual a la de salida:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + v_f t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando, encontramos el tiempo de vuelo: $t = 2v_f/g$
Si la bicicleta rueda sin deslizar, en la dirección horizontal la velocidad del barro es igual a la de traslación de la bicicleta ($v_{0x} = v_f$). La distancia horizontal recorrida es:

$$x = v_f t = 2\pi nR \quad (\text{con } n = 1) \quad \Rightarrow \quad v_f(\frac{2v_f}{g}) = 2\pi R$$

Por lo tanto, la velocidad de la bicicleta es:

$$v_f = \sqrt{\pi R g} = \sqrt{\pi(0{,}4\text{m})(9{,}80\text{m/s}^2)} = \sqrt{\pi R g} = 3{,}51\text{m/s}$$

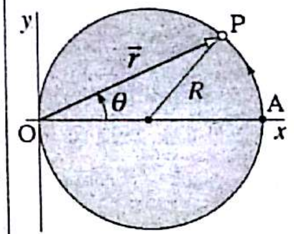
Respuesta:

$\boxed{v_f = \sqrt{\pi R g} = 3{,}51\text{m/s}}$

PR-5.15. *Rapidez angular y rapidez lineal constante.*

Una partícula se mueve en un camino circular de radio R con una rapidez angular constante, $\omega_0 = d\theta/dt$, donde θ es el ángulo entre el vector posición, $\vec{r}$, respecto al punto O y el eje x, según el dibujo mostrado.

a) Determine la velocidad y demuestre que la partícula se mueve con una rapidez constante respecto al punto O.
b) Determine la aceleración de la partícula.



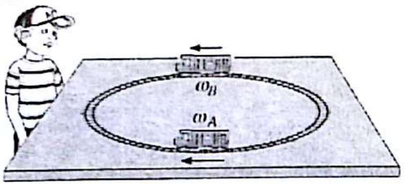
PE-5.05. ***Ciclo de secado de una lavadora***

El periodo de rotación de una lavadora durante el secado de la ropa es T. Si queremos aumentar al doble la aceleración centrípeta de la ropa en su interior, el nuevo periodo de rotación debe ser.

a) $2T$ b) $\sqrt{2}\,T$ c) $T/2$ d) $T/4$ e) $T/\sqrt{2}$

PE-5.06. ***Choque de trenes***

En una pista circular, dos trenes de juguete A y B, parten simultáneamente del mismo punto, y en sentidos contrarios.



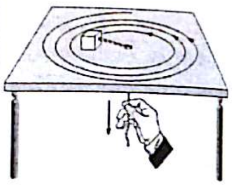
Las velocidades angulares de los trenes son: $\omega_A = 6\pi/100$ rad/s y $\omega_B = 4\pi/100$ rad/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo chocarán?

a) 20 s
b) 30 s
c) 45 s
d) 60 s
e) 100 s

PE-5.07. ***Movimiento en espiral a rapidez constante***

Un bloque atado a una cuerda se hace girar sobre una mesa horizontal a rapidez constante, siguiendo una trayectoria en espiral. Podemos asegurar que:

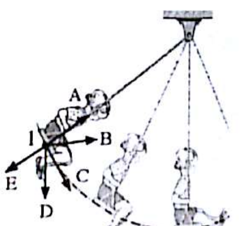
a) La aceleración del bloque es siempre nula.
b) La magnitud de su aceleración es constante y no nula.
c) La aceleración disminuye continuamente en magnitud.
d) La aceleración aumenta continuamente en magnitud.
e) La magnitud de su aceleración a veces aumenta y a veces disminuye.



PE-5.08. ***En la posición mas alta del columpio***

Una niña se encuentra en un columpio oscilando en movimiento pendular. ¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña llega a la posición extrema (punto 1)?

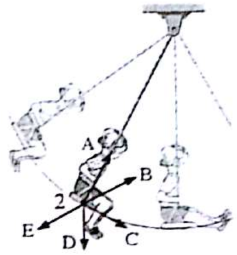
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.09. ***En la posición intermedia del columpio***

Una niña se encuentra en un columpio oscilando en movimiento pendular. ¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña va pasando por la posición intermedia de su trayectoria en el columpio (punto 2)?

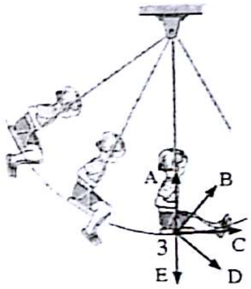
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.10. ***En la posición más baja del columpio***

¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña va pasando por la posición más baja de su trayectoria en el columpio (punto 3)?

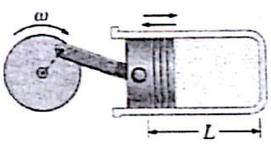
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.11. ***Conversión entre rotación y traslación***

El sistema mostrado permite transformar el movimiento de vaivén de un pistón en movimiento de rotación de un cigüeñal, y viceversa. Si el cigüeñal realiza 1800 revoluciones por minuto, la rapidez media del pistón que tiene una carrera $L = 6$ cm es:

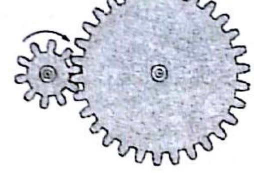
a) 180 cm/s b) 360 cm/s c) 720 cm/s
d) 1200 cm/s e) 1800 m/s



PE-5.12. ***Acoplamiento de engranajes***

Cada vez que la rueda dentada pequeña, ubicada a la izquierda da 12 vueltas, el número de vueltas que completa la rueda dentada de la derecha es..

a) 9, b) 6, c) 5, d) 4, e) 3



La solución negativa se descarta porque correspondería a un lanzamiento de la piedra desde el suelo. Para el tiempo $t_+ = +1{,}47s$, la distancia horizontal d recorrida por la piedra es:

$$d = x - x_o = v_{x0}t - Rsen\theta = v_0 \cos\theta t - Rsen\theta$$

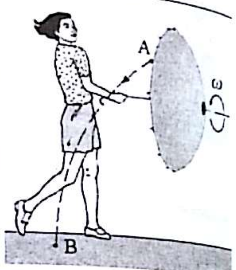
$$d = (10{,}0\text{m/s})(\cos 36{,}9°)(1{,}47\text{s}) - (1\text{m})sen 36{,}9° = 11{,}2\text{m}$$

Respuesta:

$\boxed{d = 11{,}2\text{ m}}$

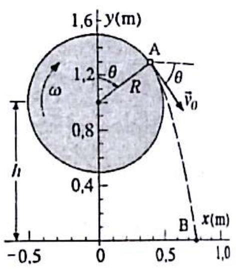
PR-5.17. *Gotas que se desprenden de un paraguas*

Una paraguas de radio R = 0,5 m se hace girar con su borde en un plano vertical, con una rapidez angular ω = 3,0 rad/s. El centro del círculo se encuentra a una altura h = 1,0 m sobre el piso. Una gota de agua se desprende en el punto A que tiene una posición angular θ = 53,1 respecto a la vertical. Determine la posición del punto B donde pega la gota contra el piso.



Solución: El módulo de la velocidad con que sale la gota, después de estar sometida al movimiento circular es:

$$v_0 = \omega R = (3\text{rad/s})(0{,}5\text{m}) = 1{,}5\text{m/s}$$



Tomando ejes de coordenadas con origen en el suelo y debajo del centro del círculo, las condiciones iniciales para el movimiento vertical son:

$$y_0 = h + R\cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 sen\theta$$

La posición vertical después de un tiempo t es:

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (h + R\cos\theta) - v_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando la gota llega al suelo, $y = 0$, por lo tanto:

$$0 = (1 + 0{,}5\cos 53{,}1°) - 1{,}5 sen 53{,}1° t - \frac{1}{2}(9{,}80)t^2$$

$$4{,}90t^2 + 1{,}20t - 1{,}60 = 0$$

$$t = \frac{-1{,}20 \pm \sqrt{1{,}44 + 4(1{,}30)(4{,}90)}}{2(4{,}90)} \quad \Rightarrow \quad t_+ = 0{,}407\,\text{s}$$

El recorrido horizontal total es:

$$x(t) = Rsen\theta + v_0 \cos\theta t$$

$$x = 0{,}5 sen 53{,}1° + 1{,}5\cos 53{,}1°(0{,}406) = 0{,}766\text{m}$$

Respuesta:

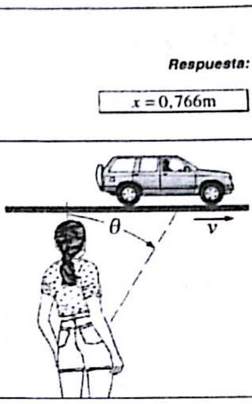
$\boxed{x = 0{,}766\text{m}}$

PR-5.18. *Viaja en línea recta y tiene velocidad angular*

Un carro que se desplaza en una carretera recta con velocidad lineal constante, $\vec{v}$, es observado por una persona que está ubicada enfrente de la carretera a una distancia perpendicular D.

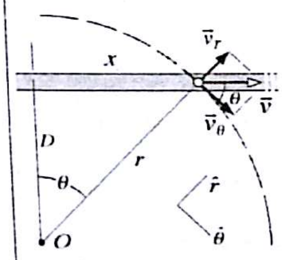
a) ¿Cuál es la velocidad angular del carro en términos del ángulo de observación θ?

b) ¿Cuál es la aceleración angular del carro?



Solución: a) En el instante en que el carro está en una posición angular θ, podemos descomponer el vector velocidad en sus componentes paralela, v_r, y perpendicular, v_θ, al vector de posición, $\vec{r}$, respecto del observador O.

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = v sen\theta\hat{r} + v\cos\theta\hat{\theta}$$



La componente v_θ es la velocidad tangencial instantánea (ωr) y por lo tanto, tenemos:

$$v\cos\theta = \omega r = \omega\left(\frac{D}{\cos\theta}\right)$$

Despejando la velocidad angular, tenemos:

$$\omega = \left(\frac{v}{D}\right)\cos^2\theta \text{ rad/s}$$

b) La aceleración angular del carro es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v\cos^2\theta}{D}\right) = -2\left(\frac{v}{D}\right)\cos\theta sen\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Reemplazando la expresión de $\omega = d\theta/dt$, se obtiene la aceleración angular (en rad/s^2) en función de θ:

$$\alpha = -2\left(\frac{v}{D}\right)\cos\theta sen\theta\left(\frac{v\cos^2\theta}{D}\right) = -2\left(\frac{v}{D}\right)^2\cos^3\theta sen\theta$$

Respuesta:

a) $\omega = \left(\frac{v}{D}\right)\cos^2\theta$

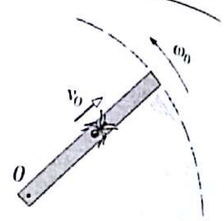
b) $\alpha = -2\left(\frac{v}{D}\right)^2\cos^3\theta sen\theta$

PR-5.19. *¿Cuál es la trayectoria de la hormiga?*

Una barra gira a velocidad angular constante, ω_0, respecto del punto fijo O, al mismo tiempo una hormiga camina hacia el extremo libre a velocidad v_o relativa a la barra. Determine:

a) La velocidad y la aceleración de la hormiga.

b) La trayectoria de la hormiga.



Solución: En coordenadas polares (r,θ) el vector de posición de la hormiga es: $\vec{r}(t)=r(t)\hat{r}(t)$. Siendo $\hat{r}(t)$ un vector unitario radial. Derivando obtenemos:

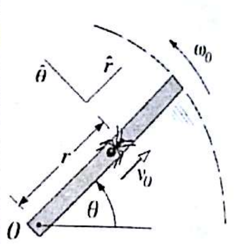
$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=r\frac{d\hat{r}}{dt}+\hat{r}\frac{dr}{dt}$$

Recordemos que:

$$\frac{dr}{dt}=v_0,\quad \frac{d\hat{r}}{dt}=\omega_0\hat{\theta}\quad \text{y}\quad \frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\omega_0\hat{r}$$

Por lo tanto, el vector velocidad es:

$$\vec{v}=r\omega_0\hat{\theta}+v_0\hat{r}$$



La velocidad de la hormiga tiene una componente radial v_0 y una componente tangencial $r\omega_0$. La aceleración se obtiene derivando el vector velocidad:

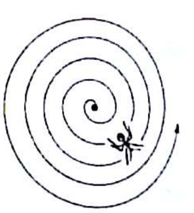
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\omega_0\hat{\theta}+v_0\hat{r})=\omega_0\frac{dr}{dt}\hat{\theta}+r\omega_0\frac{d\hat{\theta}}{dt}+v_0\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Note que ω_0 y v_0 son constantes. Sustituyendo las expresiones para las derivadas, obtenemos la aceleración:

$$\vec{a}=\omega_0(v_0)\hat{\theta}+r\omega_0(-\omega_0\hat{r})+v_0(\omega_0\hat{\theta})=2\omega_0v_0\hat{\theta}-r\omega_0^2\hat{r}$$

b) Para hallar la trayectoria de la hormiga, primero integramos la expresión para la velocidad lineal, $v_0=dr/dt$, obteniendo:

$$\int_{r_0}^{r}dr=\int_0^t v_0dt\quad\Rightarrow\quad r-r_0=v_0t\qquad(1)$$



Trayectoria en espiral de la hormiga

Similarmente, a partir de $\omega_0=d\theta/dt$, obtenemos:

$$\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t\omega_0dt\quad\Rightarrow\quad\theta-\theta_0=\omega_0t\qquad(2)$$

Donde r_0 y θ_0 son las coordenadas iniciales. Finalmente, eliminamos el tiempo de las ecuaciones (1) y (2).

$$r-r_0=\frac{v_0}{\omega_0}(\theta-\theta_0)$$

Esta ecuación: $r(\theta)=a\theta+b$, corresponde a una *espiral.*

Respuesta:

a) $\vec{v}=r\omega_0\hat{\theta}+v_0\hat{r}$

$\vec{a}=(2\omega_0v_0)\hat{\theta}-(r\omega_0^2)\hat{r}$

b) $r-r_0=\dfrac{v_0}{\omega_0}(\theta-\theta_0)$

PR-5.20. *Halle la trayectoria y los radios de curvatura*

Una partícula se mueve en el plano x-y con una velocidad:

$$\vec{v}(x)=2\hat{x}+x\hat{y}\ \text{m/s}$$

En el instante inicial la partícula está en el origen de coordenadas ($x=y=0$).

a) Determine la ecuación de la trayectoria.

b) Halle la aceleración centrípeta en función de x y de aquí el radio de curvatura de la trayectoria.

c) Verifique que la expresión para el radio de curvatura obtenido en la parte (b) coincide con la que se obtiene aplicando directamente la fórmula conocida de geometría:

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}$$

Solución: a) Cada coordenada se obtiene integrando por separado la correspondiente componente de la velocidad:

Condiciones iniciales:

$x_o=0$

$y_o=0$

$$x-x_0=\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t v_xdt=\int_0^t 2dt=2t\quad\Rightarrow\quad x=2t\qquad(1)$$

$$y-y_0=\int_{y_0}^{y}dy=\int_0^t v_ydt=\int_0^t xdt=\int_0^t 2tdt=t^2$$

$$\Rightarrow\quad y=t^2\qquad(2)$$

Despejando el tiempo de la Ec. 1 y sustituyéndolo en la Ec. 2, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y(x)=t^2=x^2/4$$

b) El módulo del vector velocidad es:

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2^2+x^2}$$

El módulo de la aceleración es:

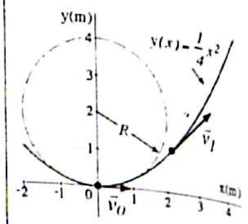
$$|\vec{a}|=|\frac{d\vec{v}}{dt}|=|\frac{d}{dt}(2\hat{x}+x\hat{y})|=|\frac{d}{dt}(2\hat{x}+2t\hat{y})|=2$$

La aceleración tiene dos componentes: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$. La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{d}{dt}|\vec{v}| = \frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{2^2 + x^2} = \frac{2x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

El radio de curvatura está relacionado con la componente radial de la aceleración:

$$a_r = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_r} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_t^2}} \qquad (3)$$



Reemplazando las expresiones de $|\vec{v}|$, $|\vec{a}|$ y a_t en esta ecuación, se obtiene el radio de curvatura en función de x:

$$R(x) = \frac{|\vec{v}|^2}{a_r} = \frac{4 + x^2}{\sqrt{a^2 - a_t^2}} = \frac{4 + x^2}{\sqrt{4 - 4x^2/(4 + x^2)}}$$

$$R(x) = \frac{1}{4}(4 + x^2)^{3/2}$$

El radio de curvatura aumenta con x y su menor valor es $R = 2m$ en $x = 0$.

c) Sustituyendo las derivadas de $y(x)$:

$$y(x) = x^2/4 \qquad dy/dx = x/2 \qquad d^2y/dx^2 = 1/2$$

En la fórmula dada, se obtiene la misma expresión para el radio de curvatura:

$$R = \frac{[1 + (x/2)^2]^{3/2}}{1/2} = \frac{1}{4}(4 + x^2)^{3/2}$$

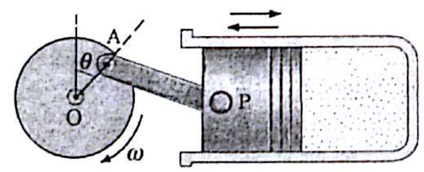
Respuesta:

a) $y(x) = \frac{1}{4}x^2$

b) $R(x) = \frac{1}{4}(4 + x^2)^{3/2}$

PR-5.21. *Traslación se convierte en rotación*

En el motor de un automóvil, mediante una biela se transforma el movimiento lineal de vaivén de un pistón en movimiento de rotación de un cigüeñal.



Suponga que en el diagrama mostrado se tienen los valores:

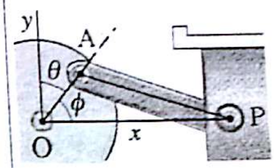
$OA = 3$ cm, $AP = 6$ cm

$\omega = 3600$ r.p.m.

Halle la ecuación de movimiento del pistón, si en el instante inicial $\theta = 0°$.

Solución: En un instante cualquiera, el radio $\overline{OA}$ del cigüeñal forma un ángulo ϕ con la horizontal. Aplicando el teorema del coseno al triángulo OAP, tenemos:

$$\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{OP}\,\overline{OA}\cos\phi$$



Tomando en cuenta que $\cos\phi = sen\theta$, y que la coordenada del punto P es $x = \overline{OP}$ tenemos:

$$6^2 = x^2 + 3^2 - 2x(3)sen\theta$$

$$x^2 - 6x\,sen\theta - 27 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x(\theta) = \frac{1}{2}[6sen\theta \pm \sqrt{36sen^2\theta + 108}]$$

$$x(\theta) = 3sen\theta + \sqrt{9sen^2\theta + 27}$$

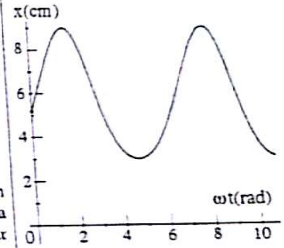
Donde se ha descartado la solución negativa ya que implicaría valores negativos de x. Tomando en cuenta la relación entre el ángulo θ y la velocidad angular constante ($\theta = \omega t$), tenemos finalmente x en función del tiempo:

$$x(t) = 3(sen\omega t + \sqrt{sen^2\omega t + 3}) \text{ (cm.)}$$

Siendo la velocidad angular: $\omega = 3600$ rpm $= 120\pi$ rad/s.

Se observa que el pistón se desplaza horizontalmente con un movimiento periódico (no armónico simple) que va desde la posición $x = 3$ cm (para $\omega t = 3\pi/2 + 2n\pi$) hasta $x = 9$ cm (para $\omega t = \pi/2 + 2n\pi$).

Respuesta:

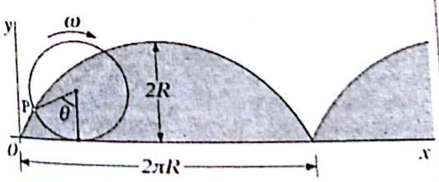


PR-5.22. *Los puntos de una rueda siguen una cicloide*

a) Demuestre que los puntos de la periferia de una rueda que se desplaza a velocidad constante sin resbalar, siguen una trayectoria cicloidal.

$$\begin{cases} x = R(\theta - sen\theta) \\ y = R(1 - cos\theta) \end{cases}$$

Donde R es el radio de la rueda, $\theta = \omega t$, y ω la velocidad angular.



b) Demuestre que la aceleración de la partícula tiene un módulo *constante*.

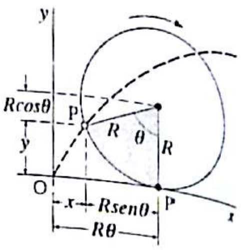
Solución: Inicialmente el punto P de la rueda está en contacto con el suelo en el origen O. Después que la rueda ha rodado en un ángulo θ, el punto de apoyo está en P'. Mientras tanto la rueda se ha desplazado una distancia:

$$d = \text{Longitud de arco } \overline{PP'} = R\theta$$

Por lo tanto, las coordenadas (x,y) del punto P son respectivamente:

$$x = d - Rsen\theta = R(\theta - sen\theta)$$

$$y = R - Rcos\theta) = R(1 - cos\theta)$$



b) Derivando estas expresiones respecto al tiempo se obtienen las componentes de la velocidad de la partícula P:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}R(\theta - sen\theta) = R(1 - cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = R\omega(1 - cos\theta)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}R(1 - cos\theta) = Rsen\theta\frac{d\theta}{dt} = R\omega sen\theta$$

Derivando las velocidades respecto al tiempo se obtienen las componentes de la aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}R\omega(1 - cos\theta) = R\omega sen\theta\frac{d\theta}{dt} = R\omega^2 sen\theta$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}R\omega sen\theta = R\omega cos\theta\frac{d\theta}{dt} = R\omega^2 cos\theta$$

El módulo del vector aceleración es:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(R\omega^2 sen\theta)^2 + (R\omega^2 cos\theta)^2} = R\omega^2$$

El ángulo ϕ que forma el vector $\bar{a}$ con la vertical es:

$$tg\phi = \frac{a_x}{a_y} = \frac{R\omega^2 sen\theta}{R\omega^2 cos\theta} = tg\theta \quad \Rightarrow \quad \phi = \theta$$

Inicialmente cuando $\theta = 0°$, el vector $\bar{a}$ apunta hacia arriba. Cuando $\theta = 180°$ el vector $\bar{a}$ punta hacia abajo. Es decir, la aceleación $\bar{a}$ es de magnitud constante y siempre apunta hacia el centro de la rueda.

Respuesta:

$|\bar{a}| = R\omega^2 = constante$
El ángulo instantáneo que forma con el eje y es $\phi = \theta$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

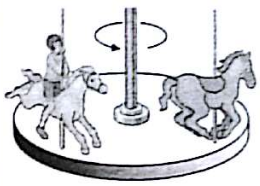
PE-5.01. ***En el movimiento circular....***

a) El vector velocidad permanece constante si el movimiento es uniforme.
b) El módulo de la aceleración radial es v^2/R, sólo si el movimiento tiene rapidez constante.
c) El objeto puede desplazarse alrededor de una curva sin estar acelerado.
d) El vector aceleración jamás puede llegar a ser paralelo al vector velocidad.
e) El vector aceleración es siempre paralelo a la línea radial.

PE-5.02. ***Aceleración centrípeta en un carrusel***

¿Cuántas vueltas por minuto debe dar un carrusel de 2,28 m de radio para que la aceleración centrípeta sobre los niños sea la mitad de la aceleración de la gravedad?

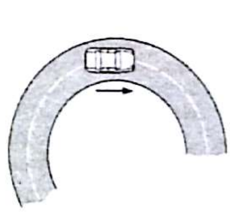
a) 4 b) 7 c) 9 d) 12 e) 14



PE-5.03. ***Hay que respetar el límite de velocidad***

Un carro entra en una curva circular de radio 45 m. Si las ruedas pueden tolerar una aceleración transversal máxima de 5 m/s^2 sin resbalar, ¿cuál es la máxima rapidez permisible?

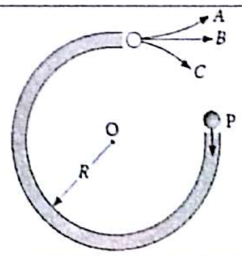
a) 54 km/h b) 72 km/h c) 80 km/h
d) 120 km/h e) 180 km/h



PE-5.04. ***Trayectoria que seguirá a la salida del canal***

Sobre una mesa horizontal se encuentra una pista en forma de un segmento de circunferencia (ver figura). Si se lanza una esferita en el punto P, ¿cuál de los caminos mostrados seguirá la esferita en la mesa horizontal al abandonar el canal?

a) A b) B c) C



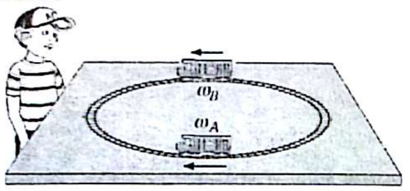
PE-5.05. ***Ciclo de secado de una lavadora***

El periodo de rotación de una lavadora durante el secado de la ropa es T. Si queremos aumentar al doble la aceleración centrípeta de la ropa en su interior, el nuevo periodo de rotación debe ser,

a) $2T$ b) $\sqrt{2}\,T$ c) $T/2$ d) $T/4$ e) $T/\sqrt{2}$

PE-5.06. ***Choque de trenes***

En una pista circular, dos trenes de juguete A y B, parten simultáneamente del mismo punto, y en sentidos contrarios.



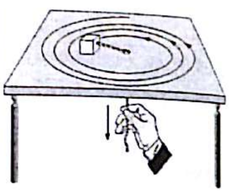
Las velocidades angulares de los trenes son: $\omega_A = 6\pi/100$ rad/s y $\omega_B = 4\pi/100$ rad/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo chocarán?

a) 20 s
b) 30 s
c) 45 s
d) 60 s
e) 100 s

PE-5.07. ***Movimiento en espiral a rapidez constante***

Un bloque atado a una cuerda se hace girar sobre una mesa horizontal a rapidez constante, siguiendo una trayectoria en espiral. Podemos asegurar que:

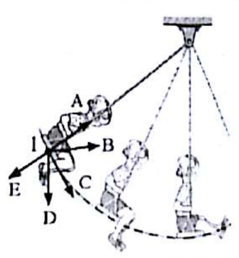
a) La aceleración del bloque es siempre nula.
b) La magnitud de su aceleración es constante y no nula.
c) La aceleración disminuye continuamente en magnitud.
d) La aceleración aumenta continuamente en magnitud.
e) La magnitud de su aceleración a veces aumenta y a veces disminuye.



PE-5.08. ***En la posición mas alta del columpio***

Una niña se encuentra en un columpio oscilando en movimiento pendular. ¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña llega a la posición extrema (punto 1)?

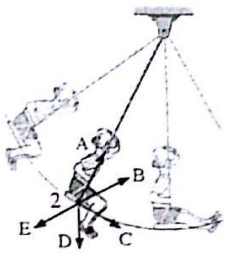
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.09. ***En la posición intermedia del columpio***

Una niña se encuentra en un columpio oscilando en movimiento pendular. ¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña va pasando por la posición intermedia de su trayectoria en el columpio (punto 2)?

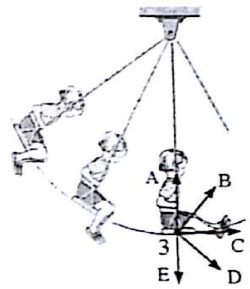
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.10. ***En la posición más baja del columpio***

¿Cual de las direcciones mostradas corresponde a la del vector aceleración cuando la niña va pasando por la posición más baja de su trayectoria en el columpio (punto 3)?

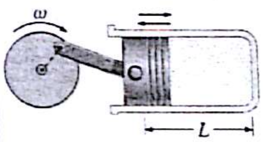
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-5.11. ***Conversión entre rotación y traslación***

El sistema mostrado permite transformar el movimiento de vaivén de un pistón en movimiento de rotación de un cigüeñal, y viceversa. Si el cigüeñal realiza 1800 revoluciones por minuto, la rapidez media del pistón que tiene una carrera $L = 6$ cm es:

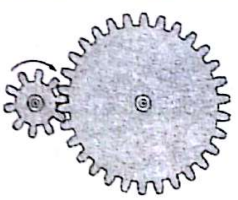
a) 180 cm/s b) 360 cm/s c) 720 cm/s
d) 1200 cm/s e) 1800 m/s



PE-5.12. ***Acoplamiento de engranajes***

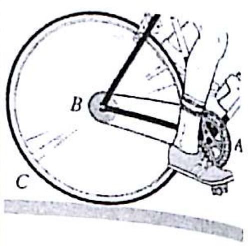
Cada vez que la rueda dentada pequeña, ubicada a la izquierda da 12 vueltas, el número de vueltas que completa la rueda dentada de la derecha es..

a) 9, b) 6, c) 5, d) 4, e) 3



PE-5.13. *Transmisión de movimientos en la bicicleta*

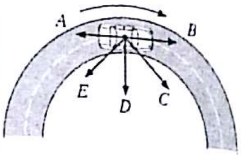
Cuando se pedalea una bicicleta, el movimiento de rotación de la rueda dentada A se transmite por una cadena a la rueda dentada más pequeña, B, la cual a su vez está unida a la rueda trasera C. La relación entre las velocidades lineales y angulares de los puntos en la periferia de cada una de las ruedas es:



a) $v_A = v_B < v_C$ $\quad \omega_A = \omega_B < \omega_C$
b) $v_A > v_B = v_C$ $\quad \omega_A > \omega_B = \omega_C$
c) $v_A = v_B > v_C$ $\quad \omega_A = \omega_B > \omega_C$
d) $v_A = v_B < v_C$ $\quad \omega_A < \omega_B = \omega_C$
e) $v_A < v_B = v_C$ $\quad \omega_A < \omega_B = \omega_C$

PE-5.14. *Aplicando los frenos en una curva*

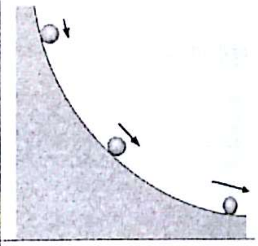
Un automóvil describe una curva en el sentido indicado y el conductor aplica los frenos. ¿cuál de los vectores representa mejor la dirección del vector aceleración en ese momento?



a) A, b) B, c) C, d) D, e) E

PE-5.15. *Pelota bajando por una pista circular*

Una pelota se suelta desde lo alto de una pista circular. A medida que la pelota va descendiendo, su aceleración…



a) Disminuye b) Aumenta c) Es constante.

PE-5.16. *Distancia entre surcos de un disco de música*

Un disco LP (de los que se usaban antes de los CD,s) gira a $33^1/2$ rpm y tarda 24 minutos en tocar toda la música grabada. Si la zona de grabación va desde un radio interior $r_1 = 7$ cm hasta un radio exterior r_2=15 cm, ¿cuál es la distancia media entre los surcos del disco?

a) 1 mm, b) 0,5 mm, c) 0,1 mm,
d) 0,05 mm, e) 0,01mm

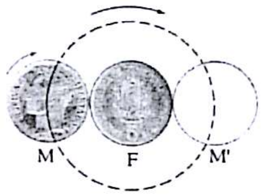
PE-5.17. *¿Cuál es la velocidad en ese instante?*

Una partícula se está moviendo en una circunferencia de radio R =1,5 m el plano xy con centro en el origen. En cierto instante su aceleración es: $\vec{a} = (-4\hat{x} + 6\hat{y})$m/s^2 y su velocidad apunta en dirección $+\hat{x}$.
Podemos decir que, en ese instante su velocidad:

a) Tiene módulo $\sqrt{6}$ m/s y está disminuyendo.
b) Tiene módulo 4 m/s y está aumentando.
c) Tiene módulo 3 m/s y está disminuyendo.
d) Tiene módulo 6 m/s y está aumentando.
e) Tiene módulo $\sqrt{12}$ m/s y está disminuyendo.

PE-5.18. *Moneda rotando alrededor de otra moneda*

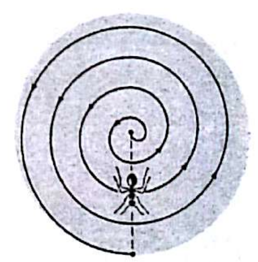
Sean dos monedas iguales, la F permanece fija y la M se mueve rodando sobre la fija. ¿En qué posición M' aparecerá la moneda móvil cuando haya dado media vuelta en torno a F?



(a) (b) (c) (d)

PE-5.19. *Hormiga dando vueltas en espiral*

Una hormiga se encuentra en el centro de un disco de radio R = 15 cm que está girando a una velocidad angular de 16 rpm. La hormiga empieza a caminar a velocidad constante en la línea radial directamente hacia un punto de la periferia del disco y cuando llega a ese punto ha completado 4 vueltas en espiral. ¿Cuál era la velocidad v de la hormiga?

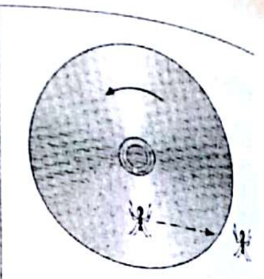


a) v = 0,1 cm/s, b) v = 0,5 cm/s, c) v = 1,0 cm/s,
d) v = 2,0 cm/s, e) v = 4,0 cm/s

PE-5.20. ***La hormiga sale desprendida del disco***

Una hormiga está en un disco de radio R cuyo plano es horizontal, a una distancia $R/2$ de su centro. El disco empieza a girar y cuando la velocidad angular es $\omega = 1$ rad/s, la hormiga sale deslizándose sin rozamiento por la superficie del disco. ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá despedida del disco?

a) 1,0 s, b) $\sqrt{2}$ s, c) $2\sqrt{2}$ s, d) $\sqrt{3}/2$ s, e) $\sqrt{3}$ s



CAP. 5: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
5.01				✓	
5.03	✓				
5.05					✓
5.07				✓	
5.09		✓			
5.11		✓			
5.13				✓	
5.15	✓				
5.17			✓		
5.19			✓		

	a	b	c	d	e
5.02					✓
5.04		✓			
5.06	✓				
5.08			✓		
5.10	✓				
5.12				✓	
5.14					✓
5.16			✓		
5.18				✓	
5.20					✓

6

CINEMÁTICA RELATIVA

Hemos hecho hincapié en que el movimiento es un concepto relativo y por lo tanto, siempre debe estar referido a un marco de referencia particular, seleccionado por el observador. Un objeto puede tener determinado tipo de movimiento según un observador, y otro tipo de movimiento según otro observador. Todo es cuestión del marco de referencia desde el cual se le mire. Es importante saber cómo están relacionadas las velocidades y aceleraciones medidas por observadores que están ubicados en distintos marcos de referencia. En este capítulo analizaremos el caso sencillo del movimiento visto desde dos observadores que se *trasladan* uno con respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme y determinaremos las reglas que relacionan estas dos descripciones (Transformaciones de Galileo). El caso en que los observadores giran uno con respecto al otro será considerado en la unidad 2 de Dinámica.

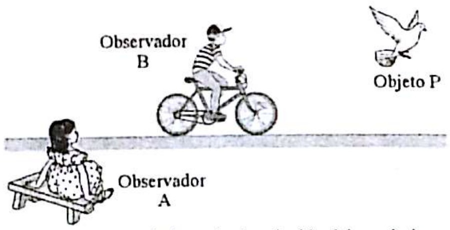
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Dos marcos de referencia en translación relativa
- Posición relativa
- Velocidad relativa
- Aceleración relativa
- Transformación galileana

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

DOS MARCOS DE REFERENCIA

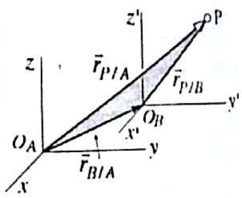
Las ecuaciones de cinemática que hemos estudiado en los temas anteriores describen cómo se observa el movimiento de una partícula cuando el origen del marco de referencia es un punto fijo en el espacio.



Queremos ahora relacionar la descripción del movimiento visto por dos distintos observadores, el A que está fijo en el suelo y el B, que se mueve en una trayectoria rectilínea.

POSICIÓN RELATIVA

Cada uno de los observadores tiene un marco de referencia correspondiente que está unido a un sistema de coordenadas cartesianas. En el marco de referencia *fijo* con origen en el punto O_A, escogemos el sistema (x, y, z) con el eje x orientado lo largo de la línea de movimiento del observador B. En el marco de referencia *móvil* con origen en el punto O_B, escogemos el sistema (x', y', z') que tenga direcciones fijas y paralelas a las de los ejes respectivos, (x, y, z). Esta condición es invariable debido a la ausencia de rotación relativa entre los dos marcos de referencia.



La localización de una partícula P respecto a cada uno de los orígenes se describe por el respectivo vector posición:

$\bar{r}_{P/A}$ = Posición de P relativa a A

$\bar{r}_{P/B}$ = Posición de P relativa a B

La localización del origen móvil O_B respecto al origen fijo O_A, es:

$\bar{r}_{B/A}$ = Posición de B relativa a A

De acuerdo al triángulo de vectores de la figura, podemos escribir la relación entre los vectores posición:

$$\bar{r}_{P/A} = \bar{r}_{P/B} + \bar{r}_{B/A}$$

$$\bar{r}_{P/A} = \bar{r}_{P/B} + \bar{r}_{B/A}$$

La posición de P medida por A es igual a la posición de P medida por B mas la de B medida por A

VELOCIDAD RELATIVA

Supongamos que el tiempo se considera absoluto, es decir, los relojes de ambos observadores están permanentemente sincronizados, y los tiempos medidos coinciden, $t_A = t_B$ *.

Tomando la derivada de $\bar{r}_{P/A}$ con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\bar{r}_{P/A} = \frac{d}{dt}\bar{r}_{P/B} + \frac{d}{dt}\bar{r}_{B/A}$$

$$\bar{v}_{P/A} = \bar{v}_{P/B} + \bar{v}_{B/A}$$

$$\bar{v}_{P/A} = \bar{v}_{P/B} + \bar{v}_{B/A}$$

Es decir: *La velocidad de la partícula relativa a A es igual a la velocidad de la partícula relativa a B más la velocidad de B relativa a A.* Se puede extender esta regla a cualquier número de marcos de referencia.

* La relatividad del tiempo es importante cuando se consideran velocidades cercanas a la de la luz.

ACELERACIÓN RELATIVA

Si derivamos la velocidad respecto del tiempo obtenemos la relación entre las aceleraciones:

$$\frac{d}{dt}\bar{v}_{P/A} = \frac{d}{dt}\bar{v}_{P/B} + \frac{d}{dt}\bar{v}_{B/A}$$

$$\bar{a}_{P/A} = \bar{a}_{P/B} + \bar{a}_{B/A}$$

$$\bar{a}_{P/A} = \bar{a}_{P/B} + \bar{a}_{B/A}$$

De esta relación se deduce que si la velocidad de B relativa a A es constante (esto es, $\bar{a}_{B/A} = 0$), entonces:

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$$

La aceleración de una partícula es la misma medida por dos observadores que se mueven entre sí con una velocidad relativa constante.

Si $\vec{v}_{B/A}$ es constante:

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$$

TRANSFORMACIÓN GALILEANA

Es de particular interés, el caso en que la velocidad relativa entre A y B, o sea $\vec{v}_{B/A}$, es constante en magnitud y dirección. El objeto P, observado pudiera estar acelerado.

Si en el instante inicial $t = 0$, los marcos de referencia coinciden, ($\vec{r}_{B/A} = 0$), entonces al transcurrir el tiempo la posición relativa de sus orígenes será:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{v}_{B/A} t$$

y la aceleración relativa es cero. $\vec{a}_{B/A} = 0$

Podemos escribir las reglas de transformación entre posiciones, velocidades y aceleraciones, llamada *Transformación galileana**. Fue Einstein, quien propuso este nombre para diferenciarla de la transformación de Lorentz que debe usarse cuando la velocidad relativa entre los observadores es cercana a la de la luz (teoría de la relatividad).

Transformación galileana

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} t$$
$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$
$$\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$$
$$t_A = t_B$$

Una característica importante de la transformación galileana es que los observadores miden la misma aceleración, es decir:

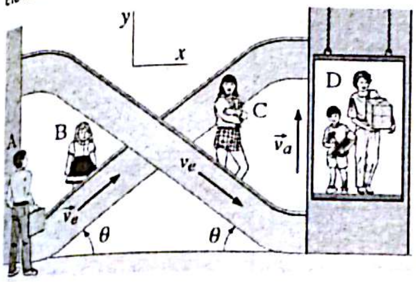
La aceleración de una partícula permanece invariante cuando se mide por dos observadores que se encuentran en movimiento relativo de traslación uniforme.

Esta importante situación la discutiremos en la unidad siguiente de dinámica, en relación con los marcos de referencia inerciales.

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-6.01 ***En el centro comercial unos suben otros bajan***

En un centro comercial, la persona B sube por una escalera eléctrica, la persona C baja por la escalera eléctrica adyacente, y las personas D suben por un elevador.



Las escaleras forman igual ángulo de inclinación, θ = 36,9°, con e eje horizontal y andan a igual rapidez, v_e = 5 m/s respecto al suelo. El ascensor sube a una velocidad v_a = 6 m/s.

a) Según la persona A en reposo respecto al suelo, ¿cuál es la velocidad de las personas B, C y D?

b) Según la persona B que sube por la escalera, ¿cuál es la velocidad de las personas A, C y D?

Solución: a) Según el observador A que está de pié en el suelo, las velocidades de las distintas personas son:

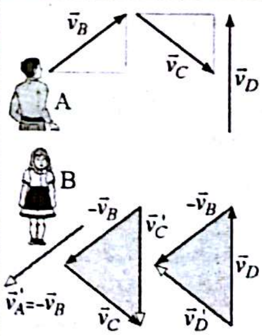
$$\vec{v}_B = v_e \cos\theta \hat{x} + v_e sen\theta \hat{y} = 5\cos 36{,}9\hat{x} + 5 sen 36{,}9\hat{y}$$

$$\vec{v}_B = (4\hat{x} + 3\hat{y}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_C = v_e \cos\theta \hat{x} - v_e sen\theta \hat{y} = 5\cos 36{,}9\hat{x} - 5 sen 36{,}9\hat{y}$$

$$\vec{v}_C = (4\hat{x} - 3\hat{y}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_D = +6\hat{y} \text{ m/s}$$



b) Según la observadora B que sube en reposo sobre la escalera, la velocidad de cada persona es la diferencia de la velocidad que tiene cada una de estas en relación al suelo menos la propia de B en relación al suelo:

$$\vec{v}_A' = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 0 - \vec{v}_B = -(4\hat{x} + 3\hat{y}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_C' = \vec{v}_C - \vec{v}_B = (4\hat{x} - 3\hat{y}) - (4\hat{x} + 3\hat{y}) = -6\hat{y} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_D' = \vec{v}_D - \vec{v}_B = +6\hat{y} - (4\hat{x} + 3\hat{y}) = (-4\hat{x} + 3\hat{y}) \text{ m/s}$$

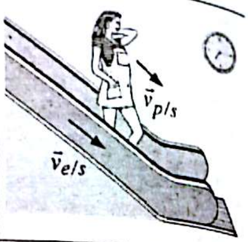
Respuesta:

a) $\vec{v}_B = (4\hat{x} + 3\hat{y})$ m/s
$\vec{v}_C = (4\hat{x} - 3\hat{y})$ m/s
$\vec{v}_D = +6\hat{y}$ m/s

b) $\vec{v}_A' = -(4\hat{x} + 3\hat{y})$ m/s
$\vec{v}_C' = -6\hat{y}$ m/s
$\vec{v}_D' = (-4\hat{x} + 3\hat{y})$ m/s

PR-6.02. *La escalera está detenida pero luego funciona*

Una persona tarda dos minutos en bajar caminando por una escalera automática que se encuentra inmóvil. Pero cuando se pone a funcionar la escalera, la persona tarda un minuto en bajar en reposo respecto a esta. ¿Cuánto tiempo tardaría la persona si ahora baja caminando por la escalera, que a su vez está moviéndose hacia abajo?



Solución: Cuando la escalera está detenida, a la persona le toma un tiempo t_1 en bajar su longitud total L. La rapidez de la persona respecto a la escalera es:

$$v_{p/e} = L/t_1$$

Con la escalera está en movimiento, a la persona sin caminar sobre ella, le toma un tiempo t_2 en bajar la misma distancia L. La rapidez de la escalera respecto al suelo es:

$$v_{e/s} = L/t_2$$

Cuando la persona baja caminando en la escalera móvil con igual rapidez que en la situación anterior, su rapidez respecto al suelo es:

$$v_{p/s} = v_{p/e} + v_{e/s}$$

Composición de velocidades:

$$\underbrace{v_{p/s}}_{\text{persona suelo}} = \underbrace{v_{p/e}}_{\text{persona escalera}} + \underbrace{v_{e/s}}_{\text{escalera suelo}}$$

Con esta rapidez, recorrerá la distancia L en un tiempo t, dado por:

$$\frac{L}{t} = \frac{L}{t_1} + \frac{L}{t_2}$$

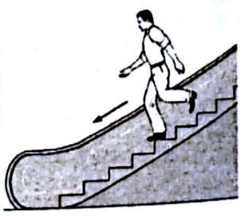
$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{120} + \frac{1}{60} = \frac{3}{120} \quad \Rightarrow \quad t = 40\text{ s}$$

Respuesta:

$\boxed{t = 40\text{ s}}$

PR-6.03. *Se puso a contar el número de escalones*

Cuando la escalera eléctrica está detenida, una persona que baja de un piso a otro cuenta un total de 30 escalones. Cuando la escalera se pone en marcha hacia abajo con velocidad v = 1 m/s, la persona baja caminando por ella con la misma rapidez con respecto a la escalera que antes pero, esta vez cuenta un total de 10 escalones. ¿Cuál era la velocidad de la persona respecto a la escalera?



Solución: Si u es la velocidad de la persona respecto a la escalera y v la de la escalera, el tiempo en recorrer la longitud total L de la escalera es:

$$t = \frac{L}{v + u}$$

En ese tiempo, la persona avanza en la escalera un tramo de longitud:

$$L' = ut = \left(\frac{u}{v+u}\right)L \quad \Rightarrow \quad \frac{L'}{L} = \frac{u}{v+u}$$

Si N es el número de escalones que cuenta cuando la escalera está detenida y N' es el número de escalones cuando la escalera baja, el número de escalones por unidad de longitud en ambos casos es el mismo:

$$\frac{N}{L} = \frac{N'}{L'} \quad \Rightarrow \quad \frac{N'}{N} = \frac{L'}{L} = \frac{u}{v+u}$$

Por lo tanto:

$$\frac{10}{30} = \frac{u}{v+u} \quad \Rightarrow \quad 10(v+u) = 30u$$

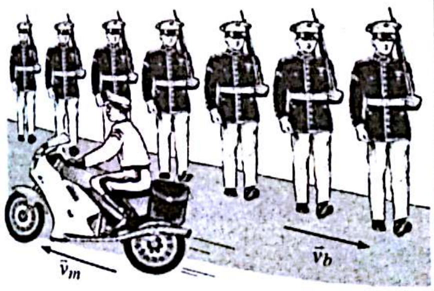
$$u = \frac{v}{2} = \frac{1\text{m/s}}{2} = 0{,}5\text{m/s}$$

Respuesta:

$\boxed{u = v/2 = 0{,}5 \text{ m/s}}$

PR-6.04. *Unos son de la marina, otros de la aviación*

En un desfile militar, los cadetes forman una columna de longitud L = 1,2 km, que marcha a velocidad v_b = 6 km/h.



El comandante envía desde el frente de la columna un motorizado que viajando en contramarcha, alcanza la retaguardia y luego regresa. Si el motorizado avanzó en ambas direcciones a velocidad constante, v_m = 18 km/h, ¿cuánto tiempo duró su recorrido de ida y vuelta?

Solución: Durante el recorrido de *ida* la velocidad del motorizado respecto al batallón de cadetes es: $v_1 = v_m + v_b$, y el tiempo que tarda viene dado por:

$$L = v_1 t_1 = (v_m + v_b)t_1$$

Durante el recorrido de *regreso* la velocidad del motorizado respecto al batallón de cadetes es: $v_2 = v_m - v_b$, y el tiempo que tarda viene dado por:

$$L = v_2 t_2 = (v_m - v_b)t_2$$

El tiempo total que estuvo en el camino es la suma de estos dos tiempos.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_m + v_b} + \frac{L}{v_m - v_b} = \frac{2v_m L}{v_m^2 - v_b^2}$$

$$t = \frac{2(18)(1,2)}{18^2 - 6,0^2} = 0,15\text{h} = 9\text{min}$$

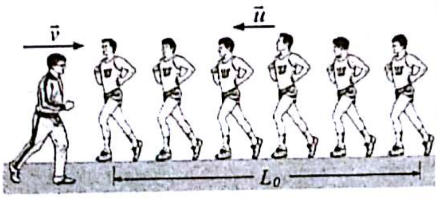
Respuesta:

$$\boxed{t = \frac{2v_m L}{v_m^2 - v_b^2} = 9 \text{ min}}$$

PR-6.05. ***Al devolverse, la columna se comprime***

Unos deportistas corren con igual velocidad, u = 3 m/s, formando una columna de longitud L_o. El entrenador corre al encuentro de la columna a la velocidad v = 5 m/s.

El entrenador al encontrarse con cada uno de ellos le va dando la orden que se devuelva con la misma velocidad u que traía. ¿Qué longitud tendrá la columna cuando todos los deportistas hayan dado la vuelta?



Solución: El entrenador recorre la columna completa a velocidad $(v + u)$ y tarda un tiempo:

$$\Delta T = \frac{L_0}{v + u}$$

Durante ese tiempo la columna se comprime en una distancia total:

$$\Delta L = 2u\Delta T = (\frac{2u}{v+u})L_0$$

Por lo tanto, la longitud final de la columna será:

$$L = L_0 - \Delta L = L_0 - (\frac{2u}{v+u})L_0 = (\frac{v-u}{v+u})L_0$$

$$L = (\frac{5-3}{5+3})L_0 = \frac{1}{4}L_0$$

Respuesta:

$$\boxed{L = \frac{1}{4}L_0}$$

PR-6.06. ***¿Por qué hay que inclinar el paraguas?***

Las gotas de lluvia caen verticalmente y un estudiante que camina a una velocidad de 1,5 m/s tiene que inclinar su paraguas en 36,9° para no mojarse.

a) ¿Por qué el estudiante tiene que inclinar el paraguas?

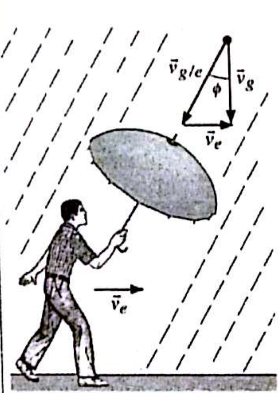
b) ¿Con qué la velocidad están cayendo las gotas?

c) ¿Si el estudiante apura la marcha a 3 m/s, cuál debe ser la nueva inclinación del paraguas para no mojarse?

Solución: a) El paraguas debe tomar la dirección del movimiento relativo resultante de la velocidad vertical de la lluvia y la horizontal del estudiante. La velocidad de las gotas en relación al estudiante, $\vec{v}_{g/e}$, cumple la relación:

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{g/e} + \vec{v}_e$$

Siendo $\vec{v}_g$ es la velocidad (vertical) de caída de las gotas de lluvia en relación al suelo y $\vec{v}_e$ es la velocidad (horizontal) del estudiante en relación al suelo.



b) De acuerdo al triángulo formado en la figura, el ángulo ϕ de inclinación del paraguas está dado por:

$$tg\phi = v_e / v_g$$

Despejando, encontramos la velocidad de caída de las gotas:

$$v_g = \frac{v_e}{tg\phi} = \frac{1,5\text{m/s}}{\text{tg}36,9°} = \frac{1,5\text{m/s}}{0,75} = 2,0\text{m/s}$$

c) Si el estudiante aumenta su velocidad a 3 m/s, el ángulo de inclinación del paraguas debe ser:

$$tg\phi = \frac{v_e}{v_g} = \frac{3,0\text{m/s}}{2,0\text{m/s}} = 1,5$$

$$\underline{\phi = 56,3^\circ}$$

Observe que cuanto mayor sea la rapidez del estudiante, mayor deberá ser la inclinación del paraguas.

Respuesta:

b) $v_g = 2$ m/s
c) $\phi = 56,3^\circ$

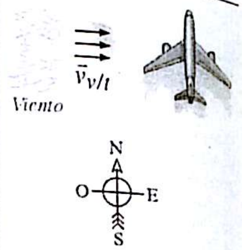
PR-6.07. *Vuelo en viento cruzado*

Un avión va en dirección hacia el norte con una velocidad respecto del aire de 240 km/h. De repente empieza a soplar un viento de oeste a este con una velocidad de 120 km/h respecto a tierra.

a) Determine la velocidad del avión relativa a tierra.

b) ¿Qué dirección debe tomar el piloto para ir derecho hacia el norte?

c) ¿Cuál sería entonces su velocidad respecto a tierra?



Solución: a) Si llamamos:

$\vec{v}_{a/v}$ = la velocidad del avión relativa al viento

$\vec{v}_{v/t}$ = la velocidad del viento respecto a tierra

entonces, la velocidad del avión relativa a tierra es:

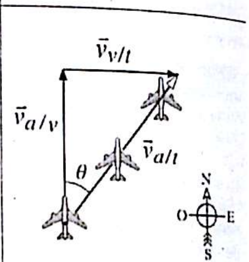
$$\vec{v}_{a/t} = \vec{v}_{a/v} + \vec{v}_{v/t}$$

El módulo del vector $\vec{v}_{a/t}$ se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por estos vectores (Fig. a):

$$v_{a/t} = \sqrt{v_{a/v}^2 + v_{v/t}^2} = \sqrt{240^2 + 120^2} = 268 \text{ km/h}$$

La dirección del vector $\vec{v}_{a/t}$ es:

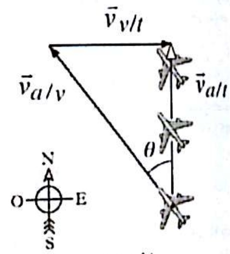
$$\theta = arctg(\frac{v_{v/t}}{v_{a/v}}) = arctg(\frac{120}{240}) = 26,6^\circ\text{Noreste}$$



(Fig. a)

b) Con el viento transversal, el piloto debe apuntar la proa hacia el viento para que el desplazamiento del avión resulte hacia el norte, figura b:

$$\vec{v}_{a/t} = \vec{v}_{a/v} + \vec{v}_{v/t}$$



(Fig. b)

La magnitud del vector resultante del avión respecto a tierra, $\vec{v}_{a/t}$ se obtiene aplicando Pitágoras:

$$v_{a/t} = \sqrt{v_{a/v}^2 - v_{v/t}^2} = \sqrt{240^2 - 120^2} = 208 \text{ km/h}$$

La dirección de la velocidad $\vec{v}_{a/t}$ es:

$$\theta = arctg(\frac{v_{v/t}}{v_{a/t}}) = arctg(\frac{120}{208}) = 30,0^\circ\text{Noroeste}$$

Respuesta:

a) $|\vec{v}_{a/t}|$ = 268 k/m a 26,6° NE
b) $|\vec{v}_{a/t}|$ = 208 k/m a 30° NO

PR-6.08. *Para cruzar el río perpendicularmente*

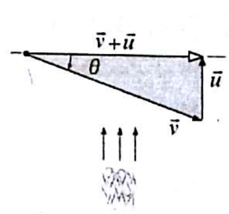
Una estudiante sabe por experiencia que en un río es capaz de recorrer una distancia doble cuando nada a favor de la corriente que cuando lo hace contra ella, en el mismo tiempo. Si desea cruzar perpendicularmente el río de una orilla a la opuesta, ¿en qué dirección debe nadar?

Solución: Sea $\vec{v}$ la velocidad de la estudiante respecto al río y $\vec{u}$ la del río. Cuando la estudiante nada a favor de la corriente su rapidez es: $(v + u)$ y cuando nada en contra de la corriente su rapidez es: $(v - u)$. Como sabemos que:

$$(v + u) = 2(v - u) \qquad \text{entonces:} \qquad v = 3u$$

Cuando la estudiante nada de una orilla a la otra de tal manera que su velocidad resultante $(\vec{v} + \vec{u})$, sea perpendicular el río, los tres vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $(\vec{v} + \vec{u})$ deben formar un triángulo rectángulo. Del gráfico se deduce entonces que, debe nadar con una velocidad $\vec{v}$ formando el ángulo θ con la perpendicular:

$$sen\theta = \frac{u}{v} = \frac{u}{3u} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 19,5^\circ$$



Respuesta:

Debe nadar contra la corriente a un ángulo θ = 19,5° respecto a la perpendicular a la orilla.

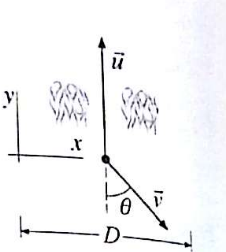
PR-6.09. *Para cruzar el río con el menor arrastre*

Una estudiante sabe por experiencia que puede nadar en un río a una velocidad dos veces inferior a la velocidad de la corriente del río. Ella desea atravesar a nado un río de anchura D = 200 m, de manera que la corriente la arrastre río abajo la menor distancia posible.

a) ¿Bajo qué ángulo respecto a la orilla deberá nadar?

b) ¿A qué distancia se la llevará la corriente río abajo?

Solución: a) Sea $\vec{v}$ la velocidad de la estudiante respecto al río y $\vec{u}$ la del río. Si θ es el ángulo que forma $\vec{v}$ con la orilla y D el ancho del río, la estudiante cruzará esta distancia en un tiempo:



$$T = D/v sen\theta$$

Tomando en cuenta que $u = 2v$, en ese tiempo ella será arrastrada en una distancia:

$$y = (u - v cos\theta)T = D\left(\frac{u - v cos\theta}{v sen\theta}\right) = D\left(\frac{2 - cos\theta}{sen\theta}\right)$$

El valor del ángulo θ que resulta en un *mínimo* en la distancia de arrastre, se consigue imponiendo la condición $dy/d\theta = 0$:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{D(2-cos\theta)}{sen\theta} = D\left[\frac{-(2-cos\theta)cos\theta}{sen^2\theta} + \frac{sen\theta)}{sen\theta}\right]$$

$$\frac{dy}{d\theta} = D\left[\frac{-2cos\theta + cos^2\theta + sen^2\theta}{sen^2\theta}\right] = 0$$

El ángulo buscado es:

$$cos\theta = 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 60°$$

b) La distancia que es arrastrada río abajo es:

$$y = D\left(\frac{2 - cos\theta}{sen\theta}\right) = 200m\left(\frac{2 - cos60°}{sen60°}\right) = 200\sqrt{3}\ m$$

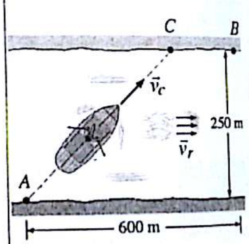
Respuesta:

a) Angulo θ = 60° con respecto a la orilla.
b) $y = 200\sqrt{3}$ m

PR-6.10. *¡Para cruzar el río en tiempo récord!*

En una competencia hay que cruzar en canoa, un río de 250 m de ancho, desde un sitio A hasta otro sitio B, en la orilla opuesta a 600 m aguas abajo. Para romper el récord anterior la travesía debe hacerse en dos minutos y medio. Sabiendo que la velocidad de la corriente del río es 3 m/s, determine

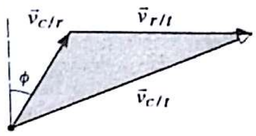
a) la dirección que debe llevar la proa de la canoa
b) la velocidad de la canoa respecto a tierra.



Solución: La velocidad resultante de la canoa respecto a tierra, es la suma de la velocidad de la canoa respecto al río, más la velocidad del río respecto a tierra:

$$\vec{v}_{c/t} = \vec{v}_{c/r} + \vec{v}_{r/t}$$

$$\vec{v}_{c/t} = \vec{v}_{c/r} + \vec{v}_{r/t}$$

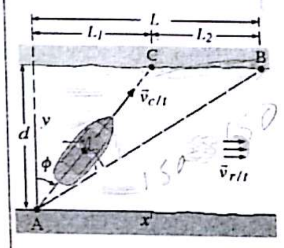


La proa tiene que orientarse hacia un punto, A de manera que al ser arrastrada por la corriente, la canoa se dirija efectivamente al punto B, ubicado aguas abajo. Las componentes x de los vectores velocidad cumplen la relación:

$$v^x_{c/t} = v^x_{c/r} + v_{r/t}$$

De modo que en un tiempo Δt (= 2,5 min) la distancia recorrida a lo largo del río es:

$$v^x_{c/t}\Delta t = v^x_{c/r}\Delta t + v_{r/t}\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad L = L_1 + L_2$$



Siendo: $\quad L_2 = v_{r/t}\Delta t = (3m/s)(150s) = 450m$

El ángulo ϕ que forma $\vec{v}_{c/r}$ con el eje y es:

$$tg\phi = \frac{L_1}{d} = \frac{L - L_2}{d} = \frac{600m - 450m}{250m} = 0{,}6$$

Por lo tanto la orientación de la canoa es: $\underline{\phi = 31{,}0°}$

Además, $sen\phi = L_1/\overline{AC}$, de modo que la longitud $\overline{AC}$ es:

$$\overline{AC} = \frac{L_1}{sen\phi} = \frac{150m}{sen31°} = 291m$$

y el módulo de la velocidad de la canoa respecto del río es:

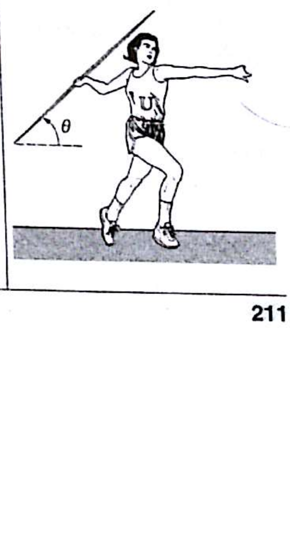
$$|\vec{v}_{c/r}| = \overline{AC}/\Delta t = (292\ m)/(150\ s) = \underline{1{,}94\ m/s}$$

Respuesta:

a) Dirección: $\phi = 31{,}0°$
b) Rapidez: $|\vec{v}_{c/r}| = 1{,}94$ m/s

PR-6.11. *¿A qué ángulo debería lanzar la jabalina?*

Una atleta puede lanzar la jabalina a una rapidez u que es 5 veces la rapidez a la cual ella puede correr. ¿A qué ángulo θ, en su marco de referencia, ella debería lanzar la jabalina para lograr que tenga el mayor alcance posible?



Solución: Vimos en el capítulo 4 que para lograr el mayor alcance posible de un proyectil se debe lanzar a un ángulo de 45° según un *observador fijo* en el suelo. Sea $\vec{u}$ la velocidad de lanzamiento de la jabalina respecto a la atleta, y $\vec{v}_a$ la velocidad (horizontal) de la atleta respecto al suelo. Para un observador fijo en el suelo las componentes horizontal y vertical de la velocidad de lanzamiento son:

$$v_y = u_y = u sen\theta$$

$$v_x = u_x + v_a = u cos\theta + \frac{u}{5}$$

Para $\theta = 45°$, estas componentes tienen igual valor:

$$u cos\theta + \frac{u}{5} = u sen\theta$$

Es decir:

$$cos\theta + \frac{1}{5} = sen\theta$$

Esto se cumple para $\theta = 53{,}1°$.

Respuesta:

Angulo de lanzamiento: $\theta = 53{,}1°$

PR-6.12. *¡Qué broma, ahora tenemos que devolvernos!*

Dos estudiantes viajan por un río, en línea recta y contra la corriente. La velocidad de la lancha respecto al río es $v = 14$ m/s y la velocidad del río es $u = 6$ m/s.

En cierto instante, la cava con los alimentos se cae al agua pero los estudiantes se percatan de ello después de haber viajado 3 km aguas arriba. Si se devuelven a buscar la cava, determine al cabo de cuánto tiempo la alcanzarán. Calcule este tiempo en los dos marcos de referencia:

a) El observador está en tierra.

b) El observador está en el agua.

Solución: a) Según un observador fijo en tierra: Cuando la lancha va contra la corriente tiene una velocidad $(v - u)$ y recorre una distancia D. Mientras que, si va corriente abajo, tendrá una velocidad $(v + u)$ y la distancia recorrida será mayor: $(D + u\Delta t)$, siendo $u\Delta t$ la distancia que se alejó la cava respecto al lugar donde cayó.

El tiempo total de movimiento de la lancha, Δt, viene dado por:

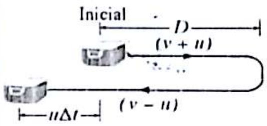
$$\Delta t = \frac{D}{v-u} + \frac{D + u\Delta t}{v+u}$$

$$\Delta t(v-u)(v+u) = D(v+u) + (D + u\Delta t)(v-u)$$

Al desarrollar esta expresión y despejar Δt, encontramos:

$$\Delta t(v^2 - u^2) = 2Dv + u\Delta t(v-u)$$

$$\Delta t = \frac{2D}{v-u} = \frac{2(3000\text{m})}{(14-6)\text{m/s}} = 750\text{s} = 12{,}5\text{min}$$

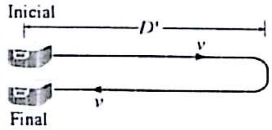


Movimiento de la lancha según un observador fijo en tierra

b) Según un un observador en el río: La cava queda estacionaria en el sitio donde cayó, mientras que la lancha se mueve a velocidad v. La lancha recorrerá una distancia D' al alejarse de la cava y la misma distancia, D' durante el regreso. El tiempo total de movimiento de la lancha es $\Delta t = 2D'/v$.

Ahora bien, la distancia D' es mayor que la distancia D que viaja la lancha contra la corriente respecto a tierra, ya que estas distancias son proporcionales a las velocidades respectivas:

$$\frac{D'}{D} = \frac{v}{v-u}$$



Movimiento de la lancha según un Observador fijo en el río

Por lo tanto, el tiempo que les toma llegar a la cava según un observador arrastrado por el agua es:

$$\Delta t = \frac{2D'}{v} = \frac{2D}{v-u} = \frac{2(3000\text{m})}{(14-6)\text{m/s}} = 750\text{s} = 12{,}5\text{min}$$

Que coincide con el resultado obtenido en (a).

Respuesta:

$\Delta t = 12{,}5$ min

PR-6.13. *¿Cuánto tarda el viaje si se le apaga el motor?*

Una lancha navegando a lo largo de un río y contra la corriente, tarda 3 horas en ir desde un sitio A hasta otro B. En cambio, el viaje de regreso de B a A (río abajo) lo hace en 2 horas. En ambos casos la velocidad de la lancha respecto al río es la misma. ¿Cuánto tiempo tardaría la lancha si va de B a A con el motor apagado ?

Solución: Cuando la lancha va contra la corriente su velocidad con respecto a la orilla es $(v - u)$ y recorre la distancia D en un tiempo:

$$t_1 = \frac{D}{(v-u)} \qquad \Rightarrow \qquad v - u = \frac{D}{t_1}$$

Cuando la lancha va contra la corriente su velocidad con respecto a la orilla es $(v+u)$ y recorre la distancia D en un tiempo:

$$t_2 = \frac{D}{(v+u)} \qquad \Rightarrow \qquad v + u = \frac{D}{t_2}$$

Combinando estas dos ecuaciones, encontramos la velocidad u del río:

$$u = \frac{D}{2}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right) = \frac{D}{2}\left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right)$$

Con el motor apagado, la lancha es arrastrada por el río y recorrerá la distancia D en un tiempo:

$$t_3 = \frac{D}{u} = 2\left(\frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2}\right) = 2\frac{(3\text{h})(2\text{h})}{3\text{h} - 2\text{h}} = 12 \text{ horas}$$

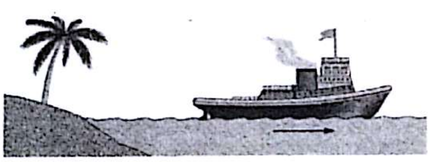
Respuesta:

Tarda 12 horas

PR-6.14. ***Por la dirección de la bandera se calcula la velocidad del viento.***

Un barco se desplaza en línea recta en aguas tranquilas a una velocidad de 10 km/h en relación a tierra, y el viento sopla de tal manera que la bandera forma un ángulo de 120° con el curso del barco.

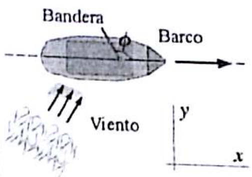
Cuando la velocidad del barco se incrementa a 20 km/h la orientación de la bandera respecto al curso del barco aumenta a 150°. ¿Cuál es el módulo y dirección de la velocidad del viento?



Solución: La dirección de la bandera indica la dirección del viento en relación a la dirección del barco. La velocidad del viento respecto a tierra, $\vec{v}_{v/t}$, resulta de sumar la velocidad del viento respecto al barco, $\vec{v}_{v/b}$, mas la velocidad del barco respecto a tierra $\vec{v}_{b/t}$:

$$\vec{v}_{v/t} = \vec{v}_{v/b} + \vec{v}_{b/t}$$

Para hallar $\vec{v}_{v/t}$ escogemos un sistema de referencia fijo en tierra, estando el eje $x+$ en la dirección y sentido del curso del barco. Llamemos ϕ al ángulo que forma el vector $\vec{v}_{v/b}$ con el eje x y θ al ángulo que forma $\vec{v}_{v/t}$ con el mismo eje. Podemos escribir la ecuación anterior en sus componentes escalares:

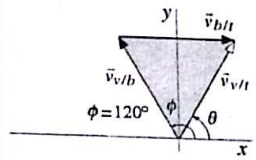


Dirección x: $\quad v_{b/t} = v_{v/b} sen(\phi - 90°) + v_{v/t} cos\theta \qquad (1)$

Dirección y: $\quad v_{v/b} cos(\phi - 90°) = v_{v/t} sen\theta \qquad (2)$

Despejando $v_{v/b}$ de la ecuación (2) y sustituyéndola en la (1) se obtiene:

$$v_{b/t} = v_{v/t}[\,tg(\phi - 90°)sen\theta + cos\theta\,] \qquad (3)$$

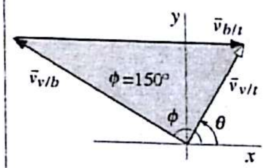


Para $v_{b/t}$ = 10 km/h y ϕ = 120°, de la Ec. 3 se obtiene:

$$10 = v_{v/t}[\,tg30° sen\theta + cos\theta\,] \qquad (4)$$

Para $v_{b/t}$ = 20 km/h y ϕ = 150°, de la Ec. 3 se obtiene:

$$20 = v_{v/t}[\,tg60° sen\theta + cos\theta\,] \qquad (5)$$



Después de dividir la ecuación (5) entre la (4), se despeja $tg\theta$,

$$tg\theta = \frac{1}{tg60° - 2tg30°} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2/\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta = 60°}$$

La velocidad del viento, $v_{v/t}$, se obtiene finalmente sustituyendo θ, en la ecuación (4):

$$v_{v/t} = \frac{10\text{km/h}}{tg30° sen60° + cos60°} = \underline{10 \text{ km/h}}$$

Respuesta:

El viento sopla con velocidad de 10 km/h respecto a tierra, a un ángulo de 60° respecto al curso del barco.

PR-6.15. ***No es fácil encestar la pelota de baloncesto corriendo sobre una patineta***

Una estudiante se desplaza sobre una patineta a una velocidad horizontal $v_{e/c}$ = 5 m/s, cuando lanza una pelota de baloncesto hacia la cesta ubicada a una altura h = 2,5 m por encima de sus manos. El módulo de la velocidad inicial de la pelota respecto a la estudiante es, $v_0^{p/e}$ = 8 m/s y ella desea que la pelota llegue a la cesta, justo cuando esté en la cúspide de su trayectoria.

a) ¿A qué ángulo debe lanzar la pelota?
b) ¿A qué distancia horizontal de la cesta debe lanzar la pelota?

Solución: a) Con relación a la estudiante, la velocidad inicial de la pelota tiene dos componentes: $\vec{v}_o^{\,p/e} = \vec{v}_{ox}^{\,p/e} + \vec{v}_{oy}^{\,p/e}$. La componente vertical coincide con la velocidad vertical de la pelota con relación a la cesta v_y, y en la cúspide se anula:

$$v_y^2 = (v_{y0}^{p/e})^2 - 2gh = 0$$

$$v_{y0}^{p/e} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}80)(2{,}5)} = 7{,}0\text{m/s}$$

La componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota "relativa a la estudiante" es:

$$v_{xo}^{p/e} = \sqrt{(v_o^{p/e})^2 - (v_{yo}^{p/e})^2} = \sqrt{8{,}0^2 - 7{,}0^2} = 3{,}87\text{m/s}$$

Por lo tanto, el ángulo de lanzamiento de la pelota debe ser:

$$tg\theta = \frac{v_{yo}^{p/e}}{v_{xo}^{p/e}} = \frac{7{,}00\text{m/s}}{3{,}87\text{m/s}} = 1{,}81 \quad \Rightarrow \quad \theta = 61{,}1°$$

b) Con relación a la cesta, la pelota viaja con una velocidad horizontal:

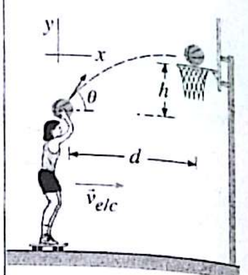
$$v_{p/c} = v_{p/e} + v_{e/c} = 3{,}87\text{m/s} + 5{,}00\text{m/s} = 8{,}87\text{m/s}$$

El tiempo t que tarda en alcanzar su altura máxima es:

$$v_y^{p/c} = v_{y0}^{p/c} - gt = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{v_{y0}^{p/c}}{g} = \frac{7{,}00\text{m/s}}{9{,}80\text{m/s}^2} = 0{,}714\text{s}$$

Por lo tanto, la distancia horizontal de la pelota a la cesta debe ser:

$$d = v_{p/c}t = (8{,}87 \text{ m/s})\ (0{,}714 \text{ s}) = 6{,}33 \text{ m}$$



Respuesta:

a) $\theta = 61{,}1°$
b) $d = 6{,}33$ m

PR-6.16. *Velocidad relativa para que den en el blanco*

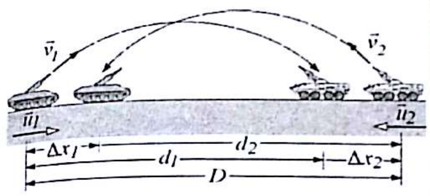
Dos tanques con cañones se aproximan en línea recta con velocidades constantes y simultáneamente disparan un proyectil uno hacia el otro.

La velocidad de cada proyectil con relación al tanque correspondiente es $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ formando los ángulos con la horizontal respectivos θ_1 y θ_2. ¿Cuál debe ser la velocidad relativa entre los tanques para que ambos proyectiles hagan impacto sobre el tanque contrario?

Solución: Si u_1 y u_2 son los módulos de las velocidades de los tanques respecto al suelo, las componentes x e y de las velocidades iniciales de los proyectiles respecto al suelo son, respectivamente:

Proyectil 1: $\quad w_{1x} = u_1 + v_1 cos\theta_1 \qquad w_{1y} = v_1 sen\theta_1$

Proyectil 2: $\quad w_{2x} = u_2 + v_2 cos\theta_2 \qquad w_{2y} = v_2 sen\theta_2$



Los tiempos de vuelo respectivos de los proyectiles son:

$$t_1 = \frac{2v_1 sen\theta_1}{g} \qquad t_2 = \frac{2v_2 sen\theta_2}{g}$$

y sus alcances horizontales son:

$$d_1 = w_{1x}t_1 = (u_1 + v_1 cos\theta_1)\frac{2v_1 sen\theta_1}{g}$$

$$d_2 = w_{2x}t_2 = (u_2 + v_2 cos\theta_2)\frac{2v_2 sen\theta_2}{g}$$

Durante el tiempo t_1 el tanque 2 se ha acercado al tanque 1 una distancia:

$$\Delta x_2 = u_2 t_1 = \frac{2u_2 v_1 sen\theta_1}{g}$$

Durante el tiempo t_2 el tanque 1 se ha acercado al tanque 2 una distancia:

$$\Delta x_1 = u_1 t_2 = \frac{2u_1 v_2 sen\theta_2}{g}$$

Si D es la distancia inicial entre los tanques en el momento de los disparos, la condición para que ambos proyectiles den en el blanco es:

$$d_1 + \Delta x_2 = d_2 + \Delta x_1 = D$$

Reemplazando las expresiones respectivas para estas distancias:

$(u_1 + v_1 cos\theta_1)2v_1 sen\theta_1 + 2u_2 v_1 sen\theta_1 =$

$$(u_2 + v_2 cos\theta_2)2v_2 sen\theta_2 + 2u_1 v_2 sen\theta_2$$

Por lo tanto, la velocidad relativa entre los tanques es $u_1 + u_2$:

$$(u_1 + u_2) = \frac{v_2^2 sen2\theta_2 - v_1^2 sen2\theta_1}{2(v_1 sen\theta_1 - v_2 sen\theta_2)}$$

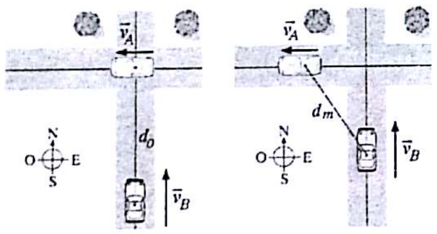
Con la condición: $v_1 sen\theta_1 \neq v_2 sen\theta_2$.

Respuesta:

$$\boxed{u_1 + u_2 = \frac{v_2^2 sen2\theta_2 - v_1^2 sen2\theta_1}{2(v_1 sen\theta_1 - v_2 sen\theta_2)}}$$

PR-6.17. *Mínimo acercamiento entre dos carros*

Dos carros viajan en direcciones perpendiculares entre sí. El carro A se dirige hacia el oeste con velocidad $v_A = 60$ km/h y el carro B se dirige hacia el norte con velocidad $v_B = 90$ km/h.



En cierto momento, cuando el carro A pasa por el cruce de las dos carreteras, el carro B todavía está a una distancia $d_0 = 150$ m aproximándose a dicho cruce.

a) ¿Cuál es la velocidad del carro B en relación al carro A?

b) ¿Cuál es la distancia mínima de acercamiento?

c) ¿Al cabo de cuanto tiempo estarán a esa distancia?

Solución: a) La velocidad del carro B relativa al carro A es:

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Del triángulo rectángulo formado por estos vectores (Fig. a) encontramos:

$$v_{B/A} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{60{,}0^2 + 90{,}0^2} = 108\text{km/h} = 30\text{m/s}$$

$$tg\theta = \frac{v_A}{v_B} = \frac{60\text{km/h}}{90\text{km/h}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 33.7^\circ \text{ Noreste}$$

b) Si nos situamos en el carro A (en reposo) se vería pasar el carro B en la dirección del vector $\vec{v}_{B/A}$, según se ilustra en la fig. b. Para hallar la distancia de menor acercamiento, hacemos pasar una recta por el punto B, que sea paralela a $\vec{v}_{B/A}$ y desde el punto A se baja una perpendicular a dicha recta.

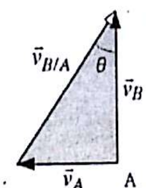
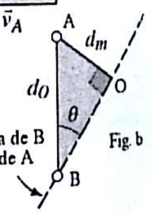


Fig. a



Trayectoria de B vista desde A

Fig. b

La longitud de esta perpendicular $\overline{AO}$ es la distancia mínima buscada. Por lo tanto:

$$d_m = d_0 sen\theta = 150\text{msen}33{,}7^\circ = 83{,}2\text{m}$$

c) El tiempo para alcanzar esta mínima distancia es:

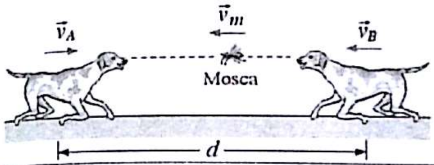
$$t = \frac{\overline{BO}}{v_{B/A}} = \frac{\sqrt{(150\text{m})^2 - (83{,}2\text{m})^2}}{30\text{m/s}} = \frac{125\text{m}}{30\text{m/s}} = \underline{4{,}16\text{ s}}$$

Respuesta:

a) $v_{B/A} = 30$m/s, $\theta = 33.7^\circ$NE
b) $d_m = 83{,}2$m
c) $t = 4{,}16$s

PR-6.18. *Mosca con los dos perros*

Dos perros van a rapidez constante de 5 m/s, uno hacia el otro. En el momento en que están separados por 200 m, una mosca parte desde la nariz de un perro hacia la nariz del otro y al tocarlo se devuelve instantáneamente hacia el otro perro, y así sucesivamente.



La mosca viaja a una rapidez de 15 m/s.

a) ¿Cuál es la distancia total que la mosca recorre durante sus múltiples viajes de ida y vuelta?

b) ¿Cuántos viajes realiza la mosca antes de que quede aplastada entre las narices de los perros?

Solución: a) La velocidad de un perro en relación al otro es: $v_{A/B} = v_A + v_B = 5$ m/s + 5 m/s = 10 m/s. Como los perros están inicialmente a una distancia $d = 200$ m, se encontrarán al cabo de un tiempo:

$$t = (200 \text{ m})/(10 \text{ m/s}) = 20 \text{ s}.$$

Durante ese tiempo, la mosca que va y viene consecutivamente a 15 m/s habrá recorrido una distancia total (15 m/s)(20 s) = $\underline{300 \text{ m}}$.

b) El tiempo total de vuelo de la mosca será la suma de todos los intervalos de tiempo de ida y vuelta. Si la mosca parte del perro B, el tiempo t_1 para encontrarse por primera vez con el perro A es:

$$t_1 = d_1/(v_A + v_m) = (200\text{m})/(5 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}) = \underline{10 \text{ s}}$$

En ese momento el espacio d_2 que queda entre los perros es:

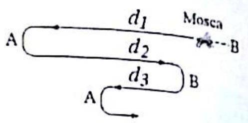
$$d_2 = d_1 - (v_A + v_B)t_1 = 200\text{m} - (5\text{m/s} + 5\text{m/s})10\text{s} = 100 \text{ m}$$

La mosca inmediatamente se devuelve hacia el perro B y el tiempo t_2 que tarda en encontrarse con éste es:

$$t_2 = d_2/(v_B + v_m) = (100\text{m})/(5\text{ m/s} + 15\text{ m/s}) = \underline{5\text{s}}$$

Al cabo de este tiempo el espacio d_3 que queda entre A y B es:

$$d_3 = d_2 - (v_A + v_B)t_2 = 100\text{m} - (5\text{m/s} + 5\text{m/s})\,5\text{s} = 50\text{ m}$$



La mosca regresa hacia el perro A y el tiempo t_3 que tarda en encontrarse por segunda vez con éste es:

$$t_3 = d_3/(v_A + v_m) = (50\text{m})/(5\text{m/s} + 15\text{m/s}) = \underline{2{,}5\text{ s}}$$

Si continuamos este proceso, notamos que cada intervalo de tiempo resulta ser la mitad del anterior. Sumando los tiempos parciales se obtiene una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y cuya razón es 1/2:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{10}{2^k} = 10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \frac{10}{8} + \ldots + \frac{10}{2^n}$$

Si consideramos un número "infinito" de términos, la suma de la serie infinita es:

$$S_\infty = 10[(\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots] = 10(\frac{1}{1-1/2}) = 20\text{s}$$

Este resultado coincide con el obtenido en forma directa en la parte a. El número de viajes que tiene que hacer la mosca resulta infinito. Desde luego que, en una situación física real el número de viajes sería finito, ya que el resultado "matemático" $n = \infty$ es consecuencia de considerar la mosca como un cuerpo puntual.

Respuesta:

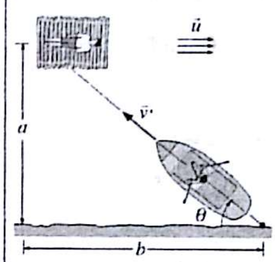
a) $d = 300$ m
b) $n = \infty$ (matemáticamente)

PR-6.19. *Al rescate de una balsa a la deriva*

Una persona está en una balsa a la deriva, la cual es arrastrada río abajo, siendo la velocidad del río: $u = 5$ km/h. Un bote de rescate sale en dirección a la balsa en el momento en que esta se encuentra en una posición a distancia $a = 0{,}3$ km perpendicular a la orilla y a distancia $b = 0{,}4$ km a lo largo de la orilla, como indica la figura. La velocidad máxima del bote con relación al río es $v' = 25$ km/h.

a) ¿Cuál es el menor tiempo requerido para efectuar el rescate?
b) ¿En cuál dirección θ con relación a la orilla debe apuntar la proa del bote?
c) ¿Cuál será dirección de la velocidad resultante del bote con relación a la orilla?

Solución: a) En el marco de referencia de la balsa, el bote de rescate debe aproximarse en línea recta con velocidad constante, v'. Por lo tanto, el tiempo requerido para efectuar el rescate no depende de la velocidad del río y viene dado por:

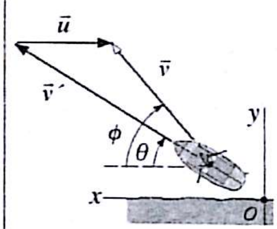


$$\Delta t = \frac{d}{v'} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v'}$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(0{,}4\text{km})^2 + (0{,}3\text{km})^2}}{25\text{km/h}} = \frac{0{,}5\text{km}}{25\text{km/h}} = 0{,}02\text{h} = 1{,}2\text{min}$$

b) La proa del bote debe orientarse a un ángulo θ:

$$tg\theta = \frac{a}{b} = \frac{0{,}3\text{km}}{0{,}4\text{km}} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36{,}9°$$



c) En un marco de referencia en la orilla del río, la velocidad $\vec{v}$ resultante del bote es:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

y las componentes cartesianas de $\vec{v}$ son:

$$v_x = v'cos\theta - u = (25\text{km/h})\cos 36{,}9° - 5\text{km/h} = 15\text{km/h}$$

$$v_y = v'_y = v'sen\theta = (25\text{km/h})\text{sen}36{,}9° = 15\text{km/h}$$

Por lo tanto, la dirección de la velocidad del bote, $\vec{v}$, con relación a la orilla está dada por:

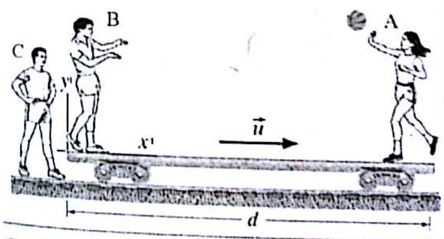
$$tg\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{15\text{km/h}}{15\text{km/h}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 45°$$

Respuesta:

a) $\Delta t = 1{,}2$ min
b) $\theta = 36{,}9°$
c) $\phi = 45°$

PR-6.20. *Trayectoria vista por diferentes observadores*

Dos estudiantes A y B están sobre un vagón que se desplaza hacia la derecha en línea recta sobre rieles a velocidad constante, $u = 10$ m/s.



La estudiante A lanza una pelota hacia el estudiante B que está en el otro extremo a una distancia $d = 10$ m. La pelota sale de las manos de A, a una altura $h = 1{,}5$ m y con una velocidad inicial con relación al vagón, $\vec{v}_0 = (-10\hat{x}' + 5\hat{y}')$ m/s. Determine la trayectoria de la pelota y su velocidad final cuando es atrapada por B, según dos observadores:

a) Un observador sobre el vagón.
b) Un observador en el anden.

Solución: a) Observador en el vagón: Las coordenadas de la pelota son:

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0x}t = (10-10t)\text{ m}$$

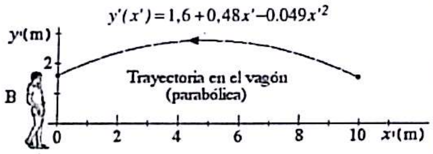
$$y'(t) = y'_0 + v'_{0y}t + \frac{1}{2}a't^2 = 1{,}5 + 5t - \frac{1}{2}(9{,}8)t^2$$

El vector posición de la pelota es:

$$\vec{r}'(t) = (10-10t)\hat{x}' + (1{,}5 + 5t - 4{,}9t^2)\hat{y}'$$

Despejando el tiempo: $t = (10-x)/10$, y sustituyéndolo en $y(t)$, encontramos que la trayectoria es una *parábola*:

$$y'(x') = 1{,}6 + 0{,}48x' - 0.049x'^2$$



La pelota llega a manos de B para $x = 0$, es decir, en el instante: $t = (10 - x')/10 = 1$s. En ese momento, la pelota está a una altura:

$$y'(1) = 1{,}5 + 5(1) - \frac{1}{2}(9{,}8)(1)^2 = 1{,}6\text{m}$$

La velocidad de llegada de la pelota es:

$$v'_x = v'_{0x} = -10\text{m/s}$$

$$v'_y = v'_{0y} - gt = 5\text{m/s} - 9{,}8\text{m/s}^2(1\text{s}) = -4{,}8\text{m/s}$$

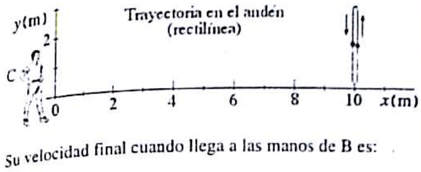
$$\vec{v}' = -(10\hat{x}' + 4{,}8\hat{y}')\text{m/s}$$

b) Observador en el andén: La componente x de la velocidad de la pelota es: $v_x = v_{0x} + u = -10\hat{x} + 10\hat{x} = 0$, y la pelota permanece en la posición $x = d = 10$m. La coordenada y es:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = 1{,}5 + 5t - \frac{1}{2}(9{,}8)t^2$$

La pelota está restringida a moverse en el eje y (*trayectoria rectilínea*) y el vector posición es:

$$\vec{r}(t) = 10\hat{x} + (1{,}5 + 5t - 4{,}9t^2)\hat{y}$$



Su velocidad final cuando llega a las manos de B es:

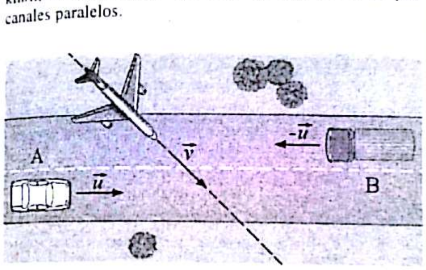
$$v_y = v_{0y} - gt = 5\text{m/s} - 9{,}8\text{m/s}^2(1\text{s}) = -4{,}8\text{m/s}$$

Respuesta:

a) Observador en el vagón:
$\vec{r}'(t) = (10-10t)\hat{x}' + (1{,}5 + 5t - 4{,}9t^2)\hat{y}'$ (parábola)
$\vec{v}' = -(10\hat{x}' + 4{,}8\hat{y}')$m/s
b) Observador en el andén:
$\vec{r}(t) = 10\hat{x} + (1{,}5 + 5t - 4{,}9t^2)\hat{y}$ (rectilínea), $\vec{v} = -4{,}8\hat{y}$ m/s

PR-6.21. ***Personas que ven el avión a distintos ángulos***

Dos carros A y B marchan con la misma rapidez: u = 80 km/h, en direcciones opuestas en una vía recta por canales paralelos.



Por encima de los carros pasa una avioneta y esto ocurre al mediodía. Una persona desde el carro A observa que la sombra de la avioneta cruza la vía a un ángulo recto, mientras que otra persona desde B observa que la sombra de la avioneta cruza a un ángulo de 37°.

a) ¿A qué ángulo cruza la sombra de la avioneta, según lo observa una tercera persona que está fija en el suelo?

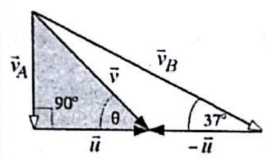
b) ¿Cuál es la rapidez de la avioneta respecto al suelo?

Solución: Sean los siguientes vectores velocidad:

$\vec{v}$ = velocidad de la avioneta respecto al suelo.
$\vec{v}_A$ = velocidad de la avioneta respecto al observador A
$\vec{v}_B$ = velocidad de la avioneta respecto al observador B

La velocidad $\vec{v}$ de la avioneta respecto al suelo es la suma de la velocidad de la avioneta respecto al observador mas la del observador respecto al suelo:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{u} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{u}$$



Estas sumas de vectores están representadas por los triángulos mostrados en la figura. El cateto común a los dos triángulos rectángulos, $|\vec{v}_A|$ está dado por:

$$|\vec{v}_A| = utg\theta = 2utg37°$$

de aquí se deduce que:

$$tg\theta = 2tg37° \quad \Rightarrow \quad \theta = 56,4°$$

A partir del triángulo de vectores correspondientes al carro A, encontramos la velocidad de la avioneta:

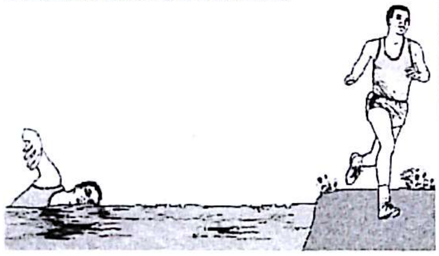
$$v = \frac{u}{cos\theta} = \frac{80,0\text{km/h}}{cos56,4°} = 145\text{km/h}$$

Respuesta:

a) $\theta = 56,4°$
b) $v = 145\text{km/h}$

PR-6.22. *Un trayecto nadando y el otro corriendo*

Un estudiante está en el punto A de la orilla de un río de ancho d = 0,50 km y quiere llegar al punto B ubicado directamente enfrente, en la otra orilla.



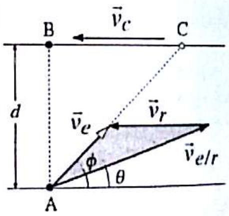
Vamos a suponer que el puede nadar a una velocidad respecto al río: $v_{e/r}$ = 3 km /h, y puede correr por la orilla a la velocidad: v_c = 5 km/h. La velocidad del río es: v_r = 2 km/h.

a) Determine la trayectoria que debe seguir el estudiante (nadando y corriendo) para llegar a B en el menor tiempo posible.

b) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a B?

Solución: a) El estudiante debe nadar contra la corriente a un ángulo θ, para que su velocidad $\vec{v}_e$ resultante respecto a la orilla quede formando un ángulo ϕ y así nade el trayecto de A a C:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{e/r} + \vec{v}_r \qquad \begin{cases} v_e cos\phi = v_{e/r} cos\theta - v_r \\ v_e sen\phi = v_{e/r} sen\theta \end{cases}$$



Dividiendo estas dos ecuaciones se obtiene:

$$cotg\phi = \frac{v_{e/r} cos\theta - v_r}{v_{e/r} sen\theta}$$

La distancia que debe correr a lo largo de la orilla es:

$$\overline{CB} = dctg\phi = d\frac{v_{e/r} cos\theta - v_r}{v_{e/r} sen\theta}$$

El tiempo empleado en recorrerla es:

$$t_{CB} = \frac{\overline{CB}}{v_c} = \frac{d}{v_c}\left(\frac{v_{e/r} cos\theta - v_r}{v_{e/r} sen\theta}\right) = \frac{0,5}{5}\left(\frac{3cos\theta - 2}{3sen\theta}\right)$$

$$t_{CB} = \frac{cos\theta - 2/3}{10sen\theta}$$

Observe que, en esta función el tiempo resulta positivo solo para ángulos: $cos\theta > 2/3$ o sea, $\theta < 48,2°$. Para tomar en cuenta la posibilidad de admitir valores $\theta > 48,2°$, es necesario que consideremos el módulo de la función:

$$t_{CB} = \frac{|cos\theta - 2/3|}{10sen\theta}$$

El tiempo que le toma nadar el trayecto $\overline{AC} = d/sen\phi$, es:

$$t_{AC} = \frac{\overline{AC}}{v_e} = \frac{d}{sen\phi v_e} = \frac{d}{v_{e/r} sen\theta} = \frac{0,5}{3sen\theta}$$

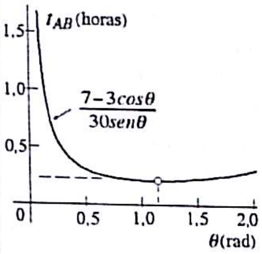
El tiempo total que tarda nadando y luego corriendo es:

$$t_{AB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{0,5}{3sen\theta} + \frac{|cos\theta - 2/3|}{10sen\theta}$$

Supongamos el caso: $cos\theta > 2/3$ (o $\theta < 48,2°$), la función queda:

$$t_{AB}(\theta) = \frac{0,5}{3sen\theta} + \frac{cos\theta - 2/3}{10sen\theta} = \frac{1 + cos\theta}{10sen\theta}$$

Esta función la descartamos porque continuamente decrece desde $t_{AB}(0) = \infty$ hasta $t_{AB}(\pi/2) = 0,1$.



Consideremos ahora el caso: $cos\theta < 2/3$ (o $\theta > 48,2°$), la función queda:

$$t_{AB} = \frac{0,5}{3sen\theta} + \frac{2/3 - cos\theta}{10sen\theta} = \frac{7 - 3cos\theta}{30sen\theta}$$

Para hallar el valor de θ que minimiza esta función, la derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{d}{d\theta}t_{AB}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{7 - 3cos\theta}{30sen\theta}\right) = \frac{-7cos\theta + 3}{30sen^2\theta} = 0$$

$$cos\theta = 3/7 \quad \Rightarrow \quad \theta = 64,6° = 1,13 \text{ rad}$$

b) El tiempo mínimo es:

$$t_{AB}(min) = \frac{7 - 3cos64,6°}{30sen64,6°} = 0,211 \text{ horas}$$

Respuesta:

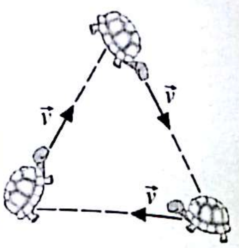
a) $\theta = 64,6°$
b) $t_{AB}(min) = 0,211$ horas

PR-6.23. *Persecución mutua de tres tortugas*

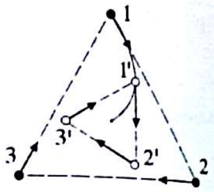
Tres tortugas se encuentran en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a = 6 m. Las tortugas empiezan a andar simultáneamente con una velocidad de magnitud constante, v = 0,5 m/min. Todo el tiempo, la primera tortuga se dirige a la segunda, la segunda a la tercera y la tercera a la primera.

a) ¿Se encontrarán las tortugas?

b) ¿Si se encuentran, después de cuánto tiempo ocurre esto?



Solución: a) Debido a la simetría de la situación, en cualquier instante las tortugas estarán en los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado decrece todo el tiempo y por lo tanto, las tres se encontrarán al cabo de un tiempo, en el centro del triángulo inicial.

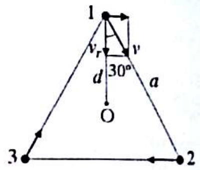


b) Metodo 1: La velocidad de cada tortuga puede descomponerse en una velocidad radial dirigida al centro O y una velocidad perpendicular a la radial. La componente radial de aproximación hacia el centro es:

$$v_r = v\cos 30° = v\sqrt{3}/2.$$

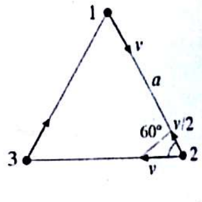
Inicialmente cada tortuga estaba a una distancia d del centro del triángulo:

$$d = a/2\cos 30° = a/\sqrt{3}.$$



Por lo tanto, las tortugas se encontrarán en ese punto en un tiempo :

$$t = \frac{d}{v_r} = \frac{a/\sqrt{3}}{v\sqrt{3}/2} = \frac{2}{3}\frac{a}{v} = \frac{2}{3}\left(\frac{6\text{m}}{0{,}5\text{m/min}}\right) = 8\text{min}$$



Metodo 2: La componente de la velocidad de la tortuga 2 en dirección hacia la tortuga 1 es: $v\cos 60° = v/2$. Por lo tanto, las tortugas se acercan con una velocidad relativa:

$$v_{12} = v + v/2 = 3v/2$$

Y se encontrarán al cabo de un tiempo:

$$t = \frac{a}{v_{12}} = \frac{a}{3v/2} = \frac{2}{3}\frac{a}{v} = \frac{2}{3}\left(\frac{6\text{m}}{0{,}5\text{m/min}}\right) = 8\text{min}$$

Respuesta:

$$\boxed{t = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{v}\right) = 8\text{min}}$$

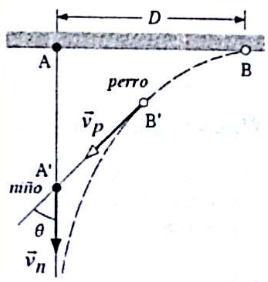
PR-6.24. *¡Sígueme!*

Un niño y su perro están en una acera separados inicialmente por una distancia D = 30 m.

El niño hace señas al perro para que lo siga y luego empieza a cruzar la calle, perpendicularmente a la acera, con una rapidez constante v_n = 1 m/s. El perro responde caminando siempre en dirección "hacia el niño" con una rapidez constante v_p = 1,5 m/s. El perro logra alcanzar al niño antes de que éste llegue a la acera de enfrente, ¿al cabo de cuánto tiempo lo alcanzará?

Solución: Cuando el niño se ha desplazado en línea recta desde A hasta A', el perro se habrá movido en un tramo curvo desde B hasta B'. En ese instante la velocidad $\bar{v}_p$ del perro apunta hacia el niño y forma un ángulo θ con la velocidad $\bar{v}_n$ del niño. Por lo tanto, el perro *converge* hacia el niño con una rapidez:

$$v = v_p - v_n\cos\theta$$



Al cabo de un tiempo T, el perro alcanzará al niño y habrá recorrido la longitud inicial D:

$$D = \int v\,dt = \int_0^T (v_p - v_n\cos\theta)dt$$

En ese mismo tiempo T la distancia que recorre el perro en dirección "perpendicular" a la acera será igual a la recorrida por el niño:

$$y = v_nT = \int_0^T (v_p\cos\theta)dt = v_p\int_0^T \cos\theta dt$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación, se obtiene:

$$D = v_p\int_0^T dt - v_n\int_0^T \cos\theta dt = v_pT - v_n\left(\frac{v_nT}{v_p}\right)$$

Por lo tanto, el tiempo T buscado es:

$$T = \frac{v_pD}{v_p^2 - v_n^2} = \frac{(1{,}50\text{m/s})(30{,}0\text{m})}{(1{,}50\text{m/s})^2 - (1{,}00\text{m/s})^2} = 36{,}0\text{ s}$$

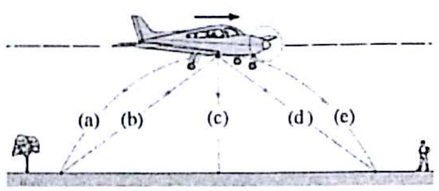
Respuesta:

$$\boxed{T = \frac{v_pD}{v_p^2 - v_n^2} = 36{,}0\text{ s}}$$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-6.01. *¿Qué trayectoria observará el piloto?*

Una avioneta vuela horizontalmente en línea recta y deja caer un paquete conteniendo provisiones.



El piloto continúa volando sin modificar su velocidad. Entre las cinco trayectorias indicadas, ¿cuál observaría el piloto?:

(a), (b), (c), (d), (e)

Se desprecia el efecto de la resistencia del aire

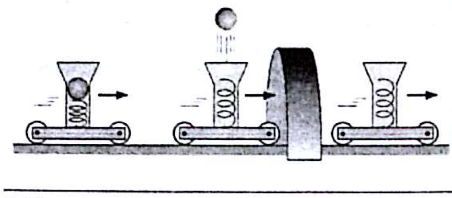
PE-6.02. *¿Qué trayectoria se observará desde tierra?*

Considerando la situación descrita en la pregunta anterior, ¿cuál sería la trayectoria del paquete que observaría una persona en tierra?

a) la a b) la b c) la c d) la d e) la e

PE-6.03. *¿Dónde caerá la pelota?*

En una de nuestras demostraciones favoritas de física 1, se utiliza un trencito que tiene un dispositivo disparador accionado por un resorte comprimido por una pelota. El trencito se mueve a velocidad constante a lo largo de una pista horizontal recta sin fricción. En un momento dado, y justo antes de entrar en un corto túnel, se libera el resorte, disparando la pelota verticalmente hacia arriba.

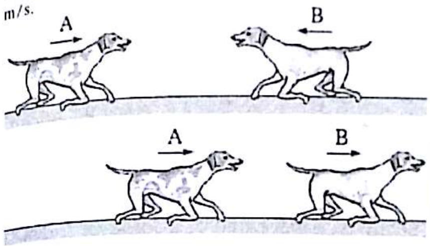


La pelota alcanza cierta altura y al descender.....

a) caerá de nuevo en el tren
b) caerá delante del tren
c) caerá detrás del tren
d) todo depende del valor de g.

PE-6.04. *Persecución canina*

Dos perros corren con rapidez constante. Cuando corren el uno hacia el otro, la velocidad relativa entre ellos es 5 m/s.



Cuando uno de los perros se devuelve y es perseguido por el otro, la velocidad relativa es 1 m/s. Según un observador en tierra, ¿cuáles podrían ser las velocidades de los perros?

a) v_A = 1 m/s y v_B = 3 m/s
b) v_A = 1 m/s y v_B = 4 m/s
c) v_A = 2 m/s y v_B = 3 m/s
d) v_A = 2 m/s y v_B = 4 m/s
e) v_A = 3 m/s y v_B = 4 m/s

PE-6.05. *Un buen observador*

Un estudiante viaja en una camioneta que se desplaza horizontalmente a velocidad constante. Está cayendo una lluvia sin viento, y el observa que las gotas dejan en los vidrios laterales, trazas a un ángulo de 36,9° con la vertical.

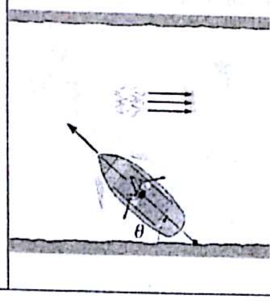
El estudiante también observa que el velocímetro de la camioneta indica 36 km/h (10 m/s), inmediatamente saca cuentas y concluye que la velocidad de caída de las gotas respecto a tierra es.....

a) 6,00 m/s,
b) 7,50 m/s,
c) 8,00 m/s,
d) 16,6 m/s
e) 13,3 m/s

PE-6.06. *Cruzando el río en el menor tiempo posible*

Un estudiante, remando una canoa, desea llegar a cualquier punto de la orilla opuesta de un río empleando el *menor tiempo* posible. El estudiante puede remar a una rapidez de 1 m/s en aguas tranquilas y el río está corriendo a 2 m/s. ¿A qué ángulo θ con respecto a la orilla, debe orientar la proa de la canoa?

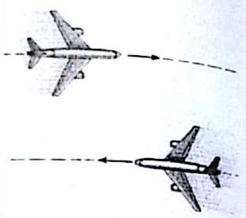
a) θ=30° b) θ=37° c) θ=45° d) θ=60° e) θ=90°



PE-6.07. *Distancia entre orificios de las balas*

Dos aviones viajan en líneas paralelas aproximándose uno al otro con igual velocidad de 120 m/s (respecto a tierra). En el momento en que se encuentran lado a lado, desde uno de los aviones disparan perpendicularmente hacia el otro, una ráfaga de ametralladora a razón de 32 disparos por segundo. ¿A qué distancia quedarán los orificios de las balas?

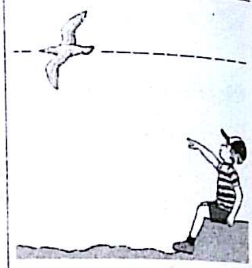
a) 3,75 m, b) 5,0 m, c) 7,5 m, d) 10,0 m, e) 15,0 m



PE-6.08. *¿Cuánto tiempo tardará la paloma mensajera?*

Cuando no sopla viento, una paloma mensajera viajando a rapidez constante, realiza normalmente en dos horas el trayecto completo de ida y vuelta entre dos ciudades A y B, separadas por una distancia de 50 km. Un cierto día está soplando un viento desde A hasta B con una rapidez de 10 km/h. ¿En cuánto tiempo cubrirá la paloma el viaje completo de ida y vuelta?

a) 0,48 horas b) 1,0 hora c) 1,6 horas
d) 2,08 horas e) 2,5 horas



PE-6.09. *Remando vs. corriendo: ¿quién gana?*

Dos estudiantes realizan una carrera, de "ida y vuelta" entre dos lugares a lo largo de un río. Un estudiante corre por la orilla, a la misma rapidez, con respecto al suelo que la del estudiante remando una canoa con respecto al agua.

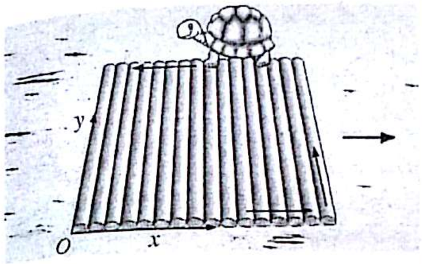
La corriente del río fluye de A a B con rapidez constante. ¿Quién gana la competencia?

a) gana el que corre
b) gana el que rema
c) empatan la carrera

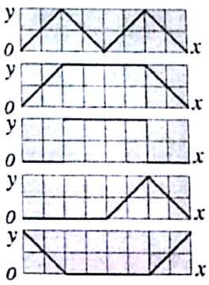
* Suponga cuerpos puntuales y que, en el punto de retorno a ambos competidores le toma un tiempo despreciable en invertir sus velocidades.

PE-6.10. *Movimiento sobre una balsa en movimiento*

Una balsa de forma cuadrada es arrastrada por un río a velocidad constante. Una tortuguita que está en la balsa, camina sobre sus bordes con *igual* rapidez, respecto a ésta en sentido anti-horario.



¿Cuál será la trayectoria vista desde la orilla del río, cuando la tortuguita da una vuelta completa a la balsa, partiendo del origen O?



PE-6.11. *Primero río abajo y luego río arriba*

El río fluye a rapidez constante de 0,4 m/s y una estudiante nada, corriente abajo una distancia de 600 m en 10 minutos. Si la estudiante se devuelve corriente arriba con la misma rapidez con respecto al río, ¿cuánto tiempo le toma el viaje de regreso al punto de partida?

a) 60 minutos, b) 50 minutos, c) 40 minutos,

d) 30 minutos, e) 20 minutos

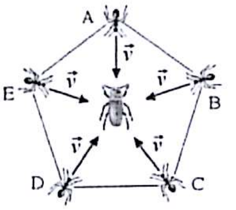
PE-6.12. *Gotas de lluvia según dos observadores*

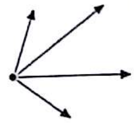
En un día lluvioso, un pasajero va en un autobús que se desplaza a velocidad constante y observa que las gotas de lluvia caen verticalmente. De acuerdo a un observador que está en reposo en la calle...

a) Las gotas caen verticalmente
b) No sopla viento
c) El autobús va en la misma dirección en que sopla el viento.
d) El autobús va en dirección contraria al viento.

PE-6.13. ***Cinco hormigas van hacia una cucaracha***

Cinco hormigas están inicialmente en las esquinas de un pentágono, en cuyo centro hay una cucaracha muerta.





Cada hormiga empieza a caminar a velocidad constante $\vec{v}$ en dirección al centro del pentágono. El diagrama de vectores mostrado a la derecha debe corresponder a las velocidades de las otras hormigas, según el marco de referencia de la hormiga.....

a) A, b) B, c) C, d) D, e) E

PE-6.14. ***¿Cuál de los salvavidas está mas accesible?***

Una persona está siendo arrastrada por un río junto con dos salvavidas que flotan a igual distancia de 5 metros a cada lado en el sentido de la corriente.

¿A cuál de los dos salvavidas puede llegar nadando en al menor tiempo?

a) Al salvavidas A.
b) Al salvavidas B.
c) Igual tiempo para ambos.

CAP. 6: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
6.01			✓		
6.03	✓				
6.05					✓
6.07			✓		
6.09	✓				
6.11		✓			
6.13		✓			

	a	b	c	d	e
6.02					✓
6.04			✓		
6.06					✓
6.08				✓	
6.10				✓	
6.12			✓		
6.14			✓		

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Para los lectores que deseen aclarar, ampliar o profundizar sus conocimientos sobre este tema a nivel de física básica universitaria, nos permitimos sugerir los siguientes libros:

ALONSO, M. y FINN, E.: *Física*, Addison Wesley, 1992.

BÚJOVTSEV, B., KRIVCHENKOV, V, MIAKISHEV, G. y SARÁEVA, I.: *Problemas Seleccionados de Física Elemental*, Editorial Mir Moscú, 1979.

EISBERG, R. y LERNER, L. S: *Física, Vol. 1*, McGraw-Hill, 1984.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON R. B. and SANDS M: *Lectures on Physics, Vol. 1*, Addison-Wesley, 1964.

FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S and THORNTON, S: *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

GIANCOLI, D: *Física: Principios con aplicaciones*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J: *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, 1997.

IRODOV, I. E.: *Problems in General Physics*, Mir Publishers, Moscú, 1989.

KITTEL, C., KNIGHT, W. and RUDERMAN, M.: *Mechanics, Berkeley Physics Course, Volume 1*, McGraw-Hill, 1965.

LEA, S y BURKE, J: Física: *La naturaleza de las cosas, Volumen 1*, International Thomson Editores, 1999.

PERELMÁN, Ya. I.: *Problemas y Experimentos Recreativos*, Ed. Mir Moscú, 1975.

SEARS, F., ZEMANSKY, M. and YOUNG H., *University Physics*, 6th Edition, Addison-Wesley, 1982.

SERWAY, R. A: *Física, Volumen 1*, Cuarta edición, McGraw-Hill, 1997.

TIPLER, P. A: *Física, Volumen 1*, Tercera edición, Editorial Reverté, 1996.

YOUNG H. D. and FREEDMAN R. A: *University Physics, Vol. 1*, 9th Edition, Addison-Wesley, 1996.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Vectores $\bar{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	$\bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$ $\bar{A} \bullet \bar{B} = AB\cos\theta \quad \bar{A} \bullet \bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ $\mid \bar{A} \times \bar{B} \mid = AB\,sen\theta$ $\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \bar{A} \bullet \bar{B} \times \bar{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$
Cinemática Rectilínea Velocidad: $v = dx/dt$ Aceleración: $a = dv/dt$	*Para* a = *constante* $v = v_0 + at \qquad \bar{v} = \dfrac{x - x_0}{t} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
Movimiento en 2D y 3D Vector posición: $\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ Velocidad: $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ $\bar{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ Aceleración: $\bar{a} = d\bar{v}/dt$	$\bar{a}$ = constante $\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t \qquad \bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0t + \dfrac{1}{2}\bar{a}t^2$ Proyectiles: $v_x = v_{x0} \qquad v_y = v_{y0} - gt \qquad x = v_{x0}t \qquad y = v_{y0}t - \dfrac{1}{2}gt^2$ Tiempo de vuelo: $t = 2v_0 sen\theta/g$ Alcance horizontal: $R = v_0^2 sen2\theta/g$ Altura máxima: $H = v_0^2 sen^2\theta/2g$
Movimiento circular Velocidad angular: $\omega = d\theta/dt$ Aceleración angular: $\alpha = d\omega/dt$ Velocidad lineal y angular $v = r\omega$ Aceleración radial: $a_r = \omega^2 r = v^2/r$ Aceleración tangencial: $a_t = \alpha r$	*Para:* α =*constante* $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 t + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$ Trayectoria curva en general $a_t = \dfrac{d\mid\bar{v}\mid}{dt} \qquad a_r = \dfrac{v^2}{r}$
Cinemática Relativa $\bar{r}_{P/A} = \bar{r}_{P/B} + \bar{r}_{B/A}$	$\bar{v}_{P/A} = \bar{v}_{P/B} + \bar{v}_{B/A}$ $\bar{a}_{P/A} = \bar{a}_{P/B} + \bar{a}_{B/A}$

LA PRESENTE EDICIÓN
SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN LOS TALLERES DE
MIGUEL ANGEL GARCÍA E HIJO, SRL
EN CARACAS - VENEZUELA,
EN EL MES DE AGOSTO DE 2008

Cinemática

Las Magnitudes Físicas • Vectores • Cinemática Rectilínea • Movimiento en Dos y Tres Dimensiones • Movimiento Circular • Cinemática Relativa

ENFOQUE METODOLÓGICO

1) ***Principios Fundamentales:*** **Teoría expuesta en forma clara y concisa, tratando de destacar los conceptos básicos y las leyes generales.**

2) ***Problemas Resueltos:*** **Selección de problemas que cubren una amplia variedad de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones de la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos.**

3) ***Verifica tu Comprensión:*** **Preguntas expresadas en forma de elección múltiple, para que compruebes tu comprensión de los temas abordados y al mismo tiempo, ayude a desarrollar tu intuición y sentido físico.**

ISBN 980-12-1334-5
9 789801 213345
lf 252 2005 5312253

Año mundial de la FÍSICA 2005